
Übungsblatt 8 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Sei K ein Körper, $T : V \rightarrow V$ linear, $c \in K$ Eigenwert von T , ferner $(v_1, \dots, v_r) \subseteq V$ Jordankette der Länge r zum Eigenwert c (d.h. $v_1 \neq 0$, $(T - cI)(v_1) = 0$ und $(T - cI)(v_i) = v_{i-1}$ für $i \in \{2, \dots, r\}$) und $W := \text{span}(\{v_1, \dots, v_r\})$.

(a) Zeige: $\{v_1, \dots, v_r\}$ linear unabhängig, also Basis für W .

(b) Zeige: $T[W] \subseteq W$, d.h. W ist T -invariant.

(c) Bezüglich der Basis $\{v_1, \dots, v_r\}$ hat die Abbildungsmatrix von $T|_W$ die Gestalt
$$\begin{pmatrix} c & 1 & & 0 \\ & c & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ 0 & & & & c \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ nilpotent (d.h. es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = B^n = 0$). Zeige: A und B sind genau dann ähnlich, wenn sie das gleiche Minimalpolynom haben.

Aufgabe 3:

(a) Zu $a \in \mathbb{C}$ sei $A_a \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{pmatrix}$. Zeige: A_a ist genau dann zu einer

Diagonalmatrix ähnlich, wenn $a = 0$.

(b) Es sei nun $B_a := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 \end{pmatrix}$. Zeige: B_0 und B_1 haben das gleiche Minimalpoly-

nom und das gleiche charakteristische Polynom, sind aber nicht ähnlich.

Aufgabe 4: Es sei $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ linear. Zeige: Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^2$ so, dass $[T]_{\mathcal{B}}$ von der Form $\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix}$ ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\text{rang}(AB - BA) = 1$. Zeige: $(AB - BA)^2 = 0$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 23. Juni 2014, um 10:00 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.