Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2014

Salma Kuhlmann
Merlin Carl

Übungsblatt 9 zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Es V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $T : V \to V$ linear, A die Matrix von T in Jordanscher Normalform. Zeige:
(a) Die Eigenwerte von T sind die Diagonaleinträge von A.
(b) Kommt $c \in K$ gerade j mal auf der Diagonalen von A vor, so ist die algebraische Vielfachheit von c im charakteristischen Polynom von T gleich j.
(c) Ist r die größte Dimension einer Jordanzelle in A zum Eigenwert c, so ist r die algebraische Vielfachheit von c im Minimalpolynom von T.
(d) Ist d die Anzahl der Jordan-Zellen in A zum Eigenwert c, so ist d die geometrische Vielfachheit von c in T.

Aufgabe 2: Benutze Aufgabe 1, um zu zeigen: Ein Operator $T : V \to V$ ist genau dann diagonalierbar, wenn sein Minimalpolynom zerfällt und für jeden Eigenwert c die algebraische Vielfachheit von c im charakteristischen Polynom von T gleich der geometrischen Vielfachheit von c in T ist.

Aufgabe 3:
(a)Bestimme die Jordansche Normalform der folgenden komplexen 6×6-Matrix:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Es sei nun $T : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ der durch B dargestellte lineare Operator. Benutze Aufgabe 1, um die Eigenwerte von T mit ihrer algebraischen Vielfachheit im charakteristischen Polynom und im Minimalpolynom sowie ihrer geometrischen Vielfachheit zu bestimmen.

Aufgabe 4:
(a) Es sei $V := \mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3, ferner T der Ableitungsoperator auf V. Finde eine Basis $\mathscr{B}$ von V, bezüglich derer $[T]_{\mathscr{B}}$ Jordansche Normalform annimmt, und gib die Jordansche Normalform an.
(b) Es sei $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom $(x-2)^3(x+7)^2$ und Minimalpolynom $(x-2)^2(x+7)$. Bestimme die Jordansche Normalform von A.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von paarweise unähnlichen komplexen 6×6-Matrizen mit charakteristischem Polynom $(x+2)^4(x-1)^2$. Wie viele Elemente kann $\mathfrak{M}$ höchstens haben?

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 30. Juni 2014, um 10:00 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.