

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1:

Wir betrachten die logische Sprache \mathcal{L}_{FA} erster Stufe mit Gleichheit und folgenden weiteren Relationszeichen:

- Wx x ist weiblich
- Mx x ist männlich
- Kxy y ist Kind von x
- Vxy x und y sind verheiratet

Formalisieren Sie nun die folgenden Aussagen:

- x ist Schwester von y . (2 Punkte)
- x ist Großmutter väterlicherseits von y . (2 Punkte)
- x und y sind Halbgeschwister. (2 Punkte)
- Jeder Onkel hat einen Bruder. (Auch angeheiratete Onkel zählen!) (2 Punkte)
- Jeder Mensch hat höchstens einen Ehepartner. (2 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Es sei $S = \{+, \cdot\} \cup \mathbb{N}$. Werten Sie die folgenden S -Terme aus, wobei $+$ und \cdot die übliche Addition und Multiplikation ganzer Zahlen bezeichnen:

- $+2 + 45$
- $\cdot + 34 + 5 \cdot 79$
- $+ \cdot + 34512$

Welches Problem entsteht bei (3)?

(b) Es sei $S = \{\circ, \cdot, \square, a, b, c\}$, wobei \circ und \cdot zweistellige Funktionssymbole sind, \square ein einstelliges Funktionssymbol ist und a, b, c Konstanten sind. Entscheiden Sie für jedes der folgenden Elemente von S^* , ob es sich um einen S -Term handelt. Geben Sie jeweils eine Herleitung an oder zeigen Sie, dass es keine gibt.

1. $\circ \cdot \square \square abc$
2. $\square \circ \circ aaaa$
3. $\circ \circ \circ \circ aa \square aa \square a$

(c) Es sei $S = \{f_1, f_2, R_1, R_2, a, b, c, x_1, x_2, x_3\}$, wobei f_1, f_2 zweistellige Funktionssymbole, R_1 einstelliges Relationssymbol, R_2 zweistelliges Relationssymbol, a, b, c Konstantenzeichen und x_1, x_2, x_3 Variablenzeichen. Entscheiden Sie für jedes der folgenden Elemente von S^* , ob es sich um einen S -Ausdruck handelt. Geben Sie jeweils eine Herleitung an oder zeigen Sie, dass es keine gibt.

1. $\exists x_1 (f_1 R_2 x_1 x_2 \leftrightarrow (\forall x_2 a \equiv b \wedge R_1 c))$
2. $\neg \forall x_2 R_2 f_1 x_1 f_2 a x_3 \vee a \equiv b$
3. $\forall a a \equiv b$
4. $\forall x_1 \forall x_1 \exists x_1 \forall x_1 R_1 a$

Zusatzaufgabe für Interessierte:

Es sei $S = \{R, c, x, \forall, \exists, \vee, \wedge, \rightarrow, \neg, (,)\}$. Ein Element von S^* heißt 'knorke', falls es durch folgende Regeln erzeugt werden kann:

- Rcx, Rcc, Rxc und Rxx sind knorke.
- Sind s_1 und s_2 knorke, so auch $(s_1 \rightarrow s_2)$, $(s_1 \wedge s_2)$ und $(s_1 \vee s_2)$.
- Ist s knorke, so auch $\forall x s$, $\exists x s$ und $\neg \neg s$.
- Ist $\neg \neg s$ knorke, so auch s

Ist $\neg \forall x Rxx$ knorke? Die Antwort ist zu beweisen.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 22.04.2015 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.