Fachbereich Mathematik und Statistik der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2015
10.06.2015
Zettel 10

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1:
(a) Es seien S, S' Symbolmengen und $\Phi \cup \{\phi\} \subseteq L^{S \cap S'}$. Zeigen Sie: $\Phi \vdash_{S'} \phi$ gdw. $\Phi \vdash_{S \cap S'} \phi$ gdw. $\Phi \vdash_S \phi$, d.h. die Ableitbarkeit von ϕ aus Φ hängt nicht von der zugrundeliegenden Symbolmenge ab.
(b) Es sei $S_{\mathrm{Gr}} := \{0, \circ\}$ die Sprache der Gruppen, Φ_{Gr} die Menge der Gruppenaxiome[1]. Ferner sei $S_< := \{<\}$ die Sprache der Ordnungen und $\Phi_{\mathrm{ord}} := \{\forall x \neg x < x, \forall x \forall y((x < y \vee y < x) \vee x \equiv y), \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z), \forall x \exists y x < y\}$. Finden Sie einen S_{Gr}-Satz ϕ mit $\Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \Phi_{\mathrm{ord}} \vdash \phi$, aber $\Phi_{\mathrm{Gr}} \not\vdash \phi$.

Aufgabe 2: Es sei S eine Symbolmenge, $\mathfrak{M}$ eine Menge von S-Strukturen und $\Phi \subseteq L_0^S$ eine Menge von Sätzen. Dann heißt $\mathfrak{M}$ 'durch Φ charakterisiert', falls für jede S-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \Phi$ gdw. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$. Geben Sie zu jeder der folgenden Symbolmengen S und Mengen $\mathfrak{M}$ von S-Strukturen eine S-Satzmenge Φ an, die $\mathfrak{M}$ charakterisiert oder zeigen Sie, dass es keine gibt.
(a) Die Menge $\mathfrak{K}_\infty$ der Körper mit unendlicher Charakteristik in der Sprache $S_{\mathrm{R}} := \{0, 1, +, \cdot\}$ der Ringe (wobei alle Symbole wie üblich interpretiert werden)
(b) Die Menge $\mathfrak{F} := \{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) : p \text{ eine Primzahl}\}$ in der Sprache S_{R}
Ein Graph ist ein Paar (V, E), wobei E eine irreflexive, symmetrische zweistellige Relation auf V ist. Ist $G = (V, E)$ ein Graph, $x, y \in V$ mit $(x, y) \in E$, so heißen x und y 'miteinander verbunden'; ein 'Pfad von x nach y' ist eine Folge $(z_i)_{1 \le i \le n}$ von Elementen von V so, dass $z_0 = x$, $z_n = y$ und $(z_i, z_{i+1}) \in E$ für $i \in \{0, ..., n-1\}$. Wir betrachten die Sprachen $S_{\mathrm{G}} := \{R\}$ mit einem zweistelligen Relationszeichen R für 'sind miteinander verbunden' sowie $S_{\mathrm{G}}^+ := \{R, C\}$ mit einem weiteren zweistelligen Relationszeichen C, wobei Cxy für 'es gibt einen Pfad von x nach y' steht.
(c) Die Menge $\mathfrak{Z}$ der zusammenhängenden Graphen in der Sprache S_{G}^+[2]
(d) Die Menge $\mathfrak{Z}$ der zusammenhängenden Graphen in der Sprache S_{G}
(e) Die Menge $\mathfrak{B}$ der bipartiten Graphen in der Sprache S_{G}.[3]
(f) Die Menge $\mathfrak{H}$ der Hamilton-Graphen in der Sprache S_{G}^+.[4]

---

[1] Vgl. Zettel 6, Aufgabe 2

[2] G heißt 'zusammenhängend', falls für je zwei $x, y \in V$ ein Pfad von x nach y existiert.

[3] $G = (V, E)$ heißt 'bipartit', falls $X, Y \subseteq V$ existieren mit $X \cup Y = V$, $X \cap Y = \emptyset$ und $E \subseteq X \times Y$, d.h. die Eckenmenge sich so in zwei Teilmengen zerlegen lässt, dass keine Kante zwischen zwei Elementen der gleichen Teilmenge verläuft.

[4] Ein Graph (V, E) heißt Hamilton-Graph, falls es eine wiederholungsfreie Aufzählung $(v_i)_{1 \le i \le n}$ seiner Eckenmenge so gibt, dass $(v_n, v_0) \in E$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $1 \le i \le n-1$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (10 Punkte)
Es sei $S_{\mathrm{PA}} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ die Sprache der Arithmetik, TA die Menge aller in $\mathbb{N}$ gültigen S_{PA}-Sätze (wobei wir alle Symbole wie üblich interpretieren).
(a) Zeigen Sie: Es existiert eine abzählbare S_{PA}-Struktur $\mathfrak{A} \models$TA, die nicht zu $\mathbb{N}$ isomorph ist.
Ist $\mathfrak{M} \models$TA mit Grundmenge M, so heißt $I \subseteq M$ 'Anfangsstück von $\mathfrak{M}$', falls I nach unten abgeschlossen ist, d.h.: Sind $x \in M$, $y \in I$ und $x < y$, so ist auch $x \in I$.
(b) Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{M} \models$TA, so hat $\mathfrak{M}$ ein Anfangsstück, das zu $\mathbb{N}$ isomorph ist.
Es seien $\Delta = (D, \leq_D)$ und $\Gamma = (G, \leq_G)$ lineare Ordnungen[5], wobei D und G OBdA disjunkt seien. Dann ist $\Delta + \Gamma := (D \cup G, \leq_{D\cup G})$, wobei für $a, b \in D \cup G$ gilt: $a \leq_{D\cup G} b$ gdw. $a \in D \wedge b \in G$ oder $a, b \in D \wedge a \leq_D b$ oder $a, b \in G \wedge q \leq_G b$. Ferner ist $\Delta \cdot \Gamma := (D \times G, \leq_{D\times G})$, wobei für $(a, b), (c, d) \in D \times G$ gilt: $(a, b) \leq_{D\times G} (c, d)$ gdw. $a <_D c$ oder $a = c \wedge b <_G d$ oder $(a, b) = (c, d)$. $(D, \leq_D)$ heißt 'dicht', falls zu $a, b \in D$ mit $a <_D b$ stets ein $c \in D$ existiert mit $a <_D c <_D b$. Ist die Ordnungsrelation $\leq_D$ aus dem Kontext klar, so identifizieren wir $(D, \leq_D)$ mit D.
(c) Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{A} \models$TA, so existiert eine dichte lineare Ordnung Δ so, dass $(A, \leq) \simeq \mathbb{N} + \Delta\mathbb{Z}$.[6]
Nach (b) identifizieren wir nun das i-te Element des zu $\mathbb{N}$ isomorphen Anfangsstücks eines TA-Modells mit der natürlichen Zahl i.
(d) Es sei $\mathbb{N} \neq \mathfrak{A} \models$TA und ϕ ein S_{PA}-Ausdruck mit einer freien Variablen x so, dass $\mathfrak{A} \models \phi[i]$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Es existiert ein $z \in \mathfrak{A} \setminus \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{A} \models \phi[z]$.

Bei den Aufgaben 1 und 2 sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 17.06.2015 in der Vorlesung oder vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.

[5] $(A, \leq_A)$ heißt lineare Ordnung, falls $\leq_A$ eine totale, reflexive, transitive, antisymmetrische Relation auf A ist.
[6] Beachten Sie, dass die leere Ordnung dicht ist.