Fachbereich Mathematik und Statistik — SS 2015
der Universität Konstanz — 24.06.2015
Dr. Merlin Carl — Zettel 11

# Übungen zur Mathematischen Logik

**Aufgabe 1**: Es sei $\Phi$ eine höchstens abzählbare Ausdrucksmenge.
(a) Angenommen, zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Interpretation $\mathcal{I} = ((A, a), \beta) \models \Phi$ mit $|A| > n$. Zeigen Sie, dass dann eine Interpretation $\mathcal{I}_c = ((A_c, a_c), \beta_c) \models \Phi$ existiert, für die $A_c$ abzählbar unendlich ist.

Es sei nun $S_{\mathrm{K}} := \{+, \cdot, 0, 1, \leq\}$ die Sprache der angeordneten Körper. Eine $S_{\mathrm{K}}$-Struktur $\mathcal{K}$ mit Grundbereich $K$ heißt 'angeordneter Körper', falls $\mathcal{K}|\{+, \cdot, 0, 1\}$ ein Körper sowie $(K, \leq)$ eine linear geordnete Menge[1] ist und ferner für alle $a, b, c \in K$ folgende Anordnungsaxiome gelten:

1. $a \leq b \rightarrow a + c \leq b + c$
2. $(0 \leq a \wedge 0 \leq b) \rightarrow 0 \leq a \cdot b$

Das 'Vollständigkeitsaxiom' $V$ besagt ferner: Ist $\emptyset \neq X \subseteq K$ nach unten abgeschlossen, d.h. folgt für alle $x, y \in K$ aus $x \leq y$ und $y \in X$ schon $x \in X$, so existiert ein Supremum von $X$ in $K$, d.h. ein $z \in K$ so, dass $z \geq x$ für alle $z \in X$ und für jedes $z' < z$ existiert ein $x \in X$ mit $z' < x$. Wie Sie aus der Analysis wissen sollten, charakterisieren die Axiome für angeordnete Körper zusammen mit dem Vollständigkeitsaxiom den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ bis auf Isomorphie.

(b) Zeigen Sie: Es existiert kein $S_{\mathrm{K}}$-Ausdruck $\phi$, der genau in denjenigen angeordneten Körpern gilt, die das Vollständigkeitsaxiom erfüllen. Das Vollständigkeitsaxiom ist also in $S_{\mathrm{K}}$ nicht ausdrückbar.

**Aufgabe 2**: Es sei $S$ eine Symbolmenge. Für eine $S$-Ausdrucksmenge $\Phi$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Ded}(\Phi)$ die 'deduktive Hülle' $\{\phi \in L^S : \Phi \vdash \phi\}$ von $\Phi$, d.h. die Menge aller $S$-Ausdrücke, die aus $\Phi$ ableitbar sind.

(a) Zeigen Sie, dass Ded ein Hüllenoperator ist, d.h.: Sind $\Phi \subseteq \Psi \subseteq L^S$, so gilt:

1. $\Phi \subseteq \mathrm{Ded}(\Phi)$
2. $\mathrm{Ded}(\Phi) \subseteq \mathrm{Ded}(\Psi)$
3. $\mathrm{Ded}(\Phi) = \mathrm{Ded}(\mathrm{Ded}(\Phi))$

[1] Siehe Blatt 10

(b) Ein Hüllenoperator $H : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ auf einer Menge $X$ hat die 'Austauscheigenschaft', falls für alle $Y \subseteq X$, alle $y \in Y$ und alle $x \in X$ gilt: Ist $x \in H(Y) \setminus H(Y \setminus \{y\})$, so ist $y \in H((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\})$. Stellen Sie (mit Beweis) fest, ob Ded für beliebige Symbolmengen $S$ auf $L^S$ die Austauscheigenschaft hat.

Eine Ausdrucksmenge $\Phi$ heißt nun 'redundant', wenn ein $\phi \in \Phi$ existiert mit $\phi \in \mathrm{Ded}(\Phi \setminus \{\phi\})$; ist $\Phi$ nicht redundant, heißt $\Phi$ 'antiredundant'.

(c) Es sei $\Phi$ eine endliche $S$-Ausdrucksmenge. Zeigen Sie: Es existiert eine antiredundante $S$-Ausdrucksmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ mit $\mathrm{Ded}(\Phi') = \mathrm{Ded}(\Phi)$.

(d) Es sei $\Phi$ eine abzählbare $S$-Ausdrucksmenge. Zeigen Sie: Es existiert eine antiredundante $S$-Ausdrucksmenge $\Phi'$ mit $\mathrm{Ded}(\Phi') = \mathrm{Ded}(\Phi)$.

(e) Finden Sie eine abzählbare $S$-Ausdrucksmenge $\Phi$ so, dass kein antiredundantes $\Phi' \subseteq \Phi$ existiert mit $\mathrm{Ded}(\Phi') = \mathrm{Ded}(\Phi)$.

**Zusatzaufgabe für Interessierte**: Die Sprache $S_\in$ der Mengenlehre enthält ein zweistelliges Relationszeichen $\in$, das wir anschaulich als 'ist Element von' lesen.

(a) Zeigen Sie: Für beliebige $a, b, c, d$ ist $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$ genau dann, wenn $a = c$ und $b = c$. $(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$ heißt daher auch das 'geordnete Paar von $a$ und $b$'.

(b) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen in $S_\in$ formulierbar sind: $x \subseteq y$, $x = y$ (Gleichheit als Mengen), $x = \emptyset$, $y = \mathfrak{P}(x)$, $x = \{y, z\}$, $x = (y, z)$, $\mathrm{Fkt}(x, y, z)$ ('$x$ ist eine Funktion von $y$ nach $z$'), $\mathrm{Inj}(x, y, z)$ ('$x$ ist eine injektive Funktion von $y$ nach $z$'), $\mathrm{Surj}(x, y, z)$ ('$x$ ist eine surjektive Funktion von $y$ nach $z$'), $\mathrm{Bij}(x, y, z)$ ('$x$ ist eine bijektive Funktion von $y$ nach $z$'), $\mathrm{Inf}(x)$ ('$x$ ist eine unendliche Menge') '$x$ ist die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, ...\} =: \omega'$'.

$\omega'$ ist offenbar abzählbar. Eine gewisse Menge von $\in$-Sätzen, genannt ZFC, enthält die allgemein in der Mathematik akzeptierten Annahmen über Mengen. Zu ZFC gehört insbesondere der Satz $\forall x \exists y (y = \mathfrak{P}(x))$, der besagt, dass jede Menge eine Potenzmenge hat. In ZFC läßt sich u.a. folgender Satz beweisen:

$$(*)\ \neg \exists f \mathrm{Bij}(f, \omega', \mathfrak{P}(\omega')) \wedge \exists g \mathrm{Inj}(g, \omega', \mathfrak{P}(\omega')).$$

(*) besagt also, dass $\mathfrak{P}(\omega')$ überabzählbar ist.

(c) Da $\{\in\}$ endlich ist, und jede widerspruchsfreie Ausdrucksmenge über einer endlichen Symbolmenge ein abzählbares Modell besitzt, existiert also eine abzählbare Struktur $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \models$ZFC, insbesondere also $\mathfrak{M} \models$ '$\mathfrak{P}(\omega')$ ist überabzählbar'. $\mathfrak{M}$ enthält also anscheinend eine überabzählbare Menge von Teilmengen von $\omega'$, ist aber selbst nur abzählbar. Erklären Sie dieses scheinbare Paradoxon.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 08.07.2015 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.