Fachbereich Mathematik und Statistik — SS 2015
der Universität Konstanz — 08.07.2015
Dr. Merlin Carl — Zettel 12

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Es sei S eine Symbolmenge, Φ eine Menge von S-Sätzen.
(a) Zeigen Sie: Ist Φ abzählbar und hat Φ ein unendliches Modell (d.h. es existiert eine S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit unendlichem Träger so, dass $\mathfrak{A} \models \Phi$), so existiert eine S-Struktur $\mathfrak{A}'$ mit abzählbarem Träger so, dass $\mathfrak{A}' \models \Phi$.
(b) Zeigen Sie: Hat Φ ein unendliches Modell und ist X eine beliebige Menge, so existiert ein Modell $\mathfrak{A} \models \Phi$, dessen Träger A mindestens so viele Elemente enthält wie X (d.h. so, dass eine injektive Abbildung $f : A \to X$ existiert).
(c) Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{A}$ eine unendliche S-Struktur, so existiert keine S-Satzmenge Φ so, dass für jede S-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \models \Phi$ zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist, d.h. keine unendliche S-Struktur ist durch eine Satzmenge bis auf Isomorphie eindeutig charakterisiert.

Aufgabe 2: Es sei $\mathcal{A}_1 := \{|\}$, $\mathcal{A}_2 := \{0, 1\}$.
(a) Geben Sie ein $\mathcal{A}_1$-Registermaschinenprogramm P_+ so an, dass P_+ mit den Symbolfolgen $\underbrace{||...|}_{m\times}$, $\underbrace{||...|}_{n\times}$ im ersten bzw. zweiten Register nach endlicher Zeit hält und bis dahin genau eine Ausgabe gedruckt hat, nämlich $\underbrace{||...|}_{m+n\times}$.
(b) Geben Sie ein $\mathcal{A}_1$-Registermaschinenprogramm P'_+ so an, dass P'_+ mit den Symbolfolgen s_1 und s_2 im ersten bzw. zweiten Register nach endlicher Zeit hält und bis dahin genau eine Ausgabe gedruckt hat, nämlich diejenige $0-1$-Folge, die im Binärsystem (ohne führende Nullen) der Summe der im Binärsystem durch s_1 bzw. s_2 dargestellten Zahlen entspricht.
(c) Geben Sie ein $\mathcal{A}_1$-Registermaschinenprogramm $P_\cdot$ so an, dass $P_\cdot$ mit den Symbolfolgen $\underbrace{||...|}_{m\times}$, $\underbrace{||...|}_{n\times}$ im ersten bzw. zweiten Register nach endlicher Zeit hält und bis dahin genau eine Ausgabe gedruckt hat, nämlich $\underbrace{||...|}_{mn\times}$.
(d) Geben Sie ein $\mathcal{A}_1$-Registermaschinenprogramm P'_+ so an, dass $P'_\cdot$ mit den Symbolfolgen s_1 und s_2 im ersten bzw. zweiten Register nach endlicher Zeit hält und bis dahin genau eine Ausgabe gedruckt hat, nämlich diejenige $0-1$-Folge, die im Binärsystem (ohne führende Nullen) dem Produkt der im Binärsystem durch s_1 bzw. s_2 dargestellten Zahlen entspricht.

Aufgabe 3:
(a) Zeigen Sie: Jede entscheidbare Menge ist auch aufzählbar.
(b) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{A}$ ein endliches Alphabet und $W \subseteq \mathcal{A}^*$, so ist W genau dann entscheidbar, wenn sowohl W als auch $\mathcal{A}^* \setminus W$ aufzählbar sind.

Zusatzaufgabe für Interessierte:
Es sei $\mathcal{A}$ eine endliche Symbolmenge, die u.a. verschiedene Symbolen für die Registermaschinenbefehle, Zeilennummern etc. enthält, so dass also sämtliche $\mathcal{A}$-Registermaschinenprogramme in $\mathcal{A}^*$ liegen. Ein $\mathcal{A}$-Programm P 'löst das Halteproblem für $\mathcal{A}$-Programme', falls P, angesetzt auf ein $\mathcal{A}$-Programm Q, genau dann '1' ausgibt, wenn Q hält, andernfalls '0'. Auf dem beiliegenden Blatt finden Sie einen in Gedichtform verfassten Beweis für die Unlösbarkeit des Halteproblems. Stellen Sie diesen mathematisch stichhaltig dar.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 15.07.2015 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.