Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2015
15.07.2015
Zettel 13

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Führen Sie die Arithmetisierung der 'Programmlänge' aus, d.h. konstruieren Sie einen $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-Ausdruck $\phi(v_1, v_2)$ so, dass $\mathbb{N} \models \phi(a, b)$ genau dann, wenn a der Code eines Programms der Länge b ist.

Aufgabe 2: Es sei S eine endliche Symbolmenge. Eine 'Übersetzung der Arithmetik in S' ist eine berechenbare Funktion $f : L^{\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}} \to L^S$ derart, dass für jedes $\Phi \subseteq L^{\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}}$ gilt: $\mathrm{Wf}_{\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}}(\Phi)$ gdw. $\mathrm{Wf}_S(f[\Phi])$. Ist f eine Übersetzung der Arithmetik in S, so heißt eine S-Ausdrucksmenge Φ 'arithmetisch korrekt', falls für alle $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-Sätze ψ gilt, dass $\Phi \vdash f(\psi)$ schon $\mathbb{N} \models \psi$ impliziert.

Zeigen Sie: Ist f eine Übersetzung der Arithmetik in S, Φ eine arithmetisch korrekte S-Ausdrucksmenge, so existiert ein $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-Satz ϕ mit $\Phi \nvdash f(\phi)$ und $\Phi \nvdash f(\neg\phi)$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (Methodische Rückschau)
'Ziel der mathematischen Logik sollte es sein, eine Darstellung und ggf. Rechtfertigung des mathematischen Beweisens zu geben. Beim Aufbau der mathematischen Logik haben wir aber ständig von mathematischen (Beweis)methoden Gebrauch gemacht. Insbesondere benutzen die 'Korrektheitsbeweise' der Sequenzenregeln Schlussregeln, deren 'Korrektheit' doch erst gezeigt werden soll. Ist das Ganze nicht ein Zirkelschluss?'

Antworten Sie auf diese Frage. Stellen Sie insbesondere heraus, welche Rolle Beweise bei der Definition des formalen Beweisbegriffes gespielt haben und machen Sie deutlich, was die Korrektheitsbeweise leisten (sollen) und was nicht.

Keine Abgabe.