Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2015
22.04.2015
Zettel 2

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1:
(a) Geben Sie zu jeder der folgenden Formeln die Menge der freien und gebundenen Variablen an. (Falls eine Variable in beiden Arten vorkommt, weisen Sie darauf hin.) Begründen Sie Ihre Antwort durch Überprüfung anhand der Definition.
(1) $\forall xRxy \wedge \exists zPyz$
(2) $(Rab \vee Rba) \rightarrow a \equiv b$
(3) $\forall a\forall b(((Rab \vee Rba) \rightarrow a \equiv b) \wedge (\exists y < yz \vee \neg\exists vv \equiv u))$
(b) Es sei S eine Sprache erster Stufe. Geben Sie durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke eine Definition der Funktion $\mathfrak{c}_S$ an, die jedem S-Ausdruck ϕ die Menge der in ihm vorkommenden Konstantenzeichen zuordnet.
(c) Es sei S eine Sprache erster Stufe. Geben Sie einen S-Kalkül $\mathfrak{K}$ an, in dem die Zeichenreihe $x\phi$ genau dann ableitbar ist, wenn x eine Variable ist und ϕ ein S-Ausdruck, in dem x frei vorkommt.

Aufgabe 2:
Es sei S eine Sprache erster Stufe.
(a) Beweisen Sie die Korrektheit des Beweisverfahrens der Induktion über den Termaufbau durch Induktion über die Termlänge.
(b) Zeigen Sie: Kein S-Ausdruck enthält weniger Variablen als Quantoren.
(c) Zeigen Sie: Jeder S-Ausdruck enthält genau so viele linke Klammern (wie von $\neg$ verschiedene Junktoren.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (Polnische Notation der Junktoren)
Wir verändern den in der Vorlesung eingeführten Ausdruckskalkül, indem wir die Regel $A4$ durch die folgende Regel ersetzen:

$A4'$: Sind ϕ, ψ S-Ausdrücke, so auch $\wedge\phi\psi$, $\vee\phi\psi$, $\rightarrow \phi\psi$ und $\leftrightarrow \phi\psi$.

Einen in diesem Kalkül ableitbaren Ausdruck nennen wir 'p-Ausdruck'. Zeigen Sie:
(a) Kein p-Ausdruck ist echtes Anfangsstück eines anderen p-Ausdrucks.
(b) Jeder p-Ausdruck ist von genau einer der Formen $t_1 \equiv t_2$, $Rt_1...t_n$, $\forall x\phi$, $\exists x\phi$, $\wedge\phi\psi$, $\vee\phi\psi$, $\rightarrow \phi\psi$, $\leftrightarrow \phi\psi$, oder $\neg\phi$ (wobei $t_1, ..., t_n$ Terme, R ein n-stelliges Relationszeichen und ϕ, ψ p-Ausdrücke bezeichnen) und $t_1, ..., t_n$, R, ϕ, ψ und x sind jeweils eindeutig bestimmt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 29.04.2015 in der Vorlesung.