Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2015
29.04.2015
Zettel 3

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1:
a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{L}$ die Sprache erster Stufe mit den zweistelligen Funktionszeichen $+$ und $\cdot$ sowie einem n-stelligen Relationszeichen S, die die reelle Addition, die reelle Multiplikation sowie die Zugehörigkeit eines Punktes $(x_1, ..., x_n)$ zu einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnen. Formalisieren Sie in $\mathfrak{L}$ die Aussage, dass S kompakt ist.
b) Es sei ϕ eine Formel mit $\text{frei}(\phi) = \{x\}$. Finden Sie eine Formel ψ_1, die besagt, dass ϕ auf mindestens 3 Dinge zutrifft und eine Formel ψ_2, die besagt, dass ϕ auf höchstens 3 Dinge zutrifft.

Aufgabe 2:
Es sei $\mathfrak{L}$ die logische Sprache erster Stufe mit folgenden
Funktions-, Relations- und Konstantenzeichen (Stellenzahl im Exponenten): $(f^{(1)}, R^{(1)}, S^{(2)}, c)$. Geben Sie für jede der beiden folgenden Formeln ϕ_1, ϕ_2 und $\mathfrak{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ an, ob ϕ_i in $\mathfrak{A}_j$ gilt.
$\phi_1 \equiv \forall x \exists y(\neg Rfc \to Sxy)$
$\phi_2 \equiv \exists x \forall y(Rc \vee Sxfy)$
$\mathfrak{A}_1 := (\{A, B, C, D\}, \{(A, A), (B, C), (C, B), (D, D)\}, \{B, C, D\}, \{(A, B), (A, C), (A, D)\}, A)$
$\mathfrak{A}_2 := (\{A, B, C\}, \{(A, B), (B, C), (C, A)\}, \{B, C\}, \{(B, B), (B, C), (C, C)\}, B)$
($2\frac{1}{2}$ Punkte für jede richtige Angabe.)

Zusatzaufgabe für Interessierte: (20 Punkte)

(a) Ein automatisches Auskunftssystem zur Semesterplanung enthält neben Basisfakten (z.B. zu Lehrveranstaltungen, Zeiten, Räumen, Voraussetzungen und zu erreichenden ECTS-Punkten) auch einige Regeln wie etwa 'finden Veranstaltungen V_1 und V_2 gleichzeitig statt, können nicht beide belegt werden'. Das System soll Fragen beantworten wie 'Kann ich im kommenden Semester die Veranstaltungen xyz besuchen?'. Da sich Raum-, Zeit- und Lehrpläne bisweilen ändern und nicht immer alle Informationen rechtzeitig eingetragen werden, wird es häufig vorkommen, dass eine wichtige Information zum Zeitpunkt einer Abfrage nicht zur Verfügung steht. In diesem Fall soll die Rückmeldung erfolgen, dass die Antwort 'unbekannt' ist. Das System sollte also neben den Wahrheitswerten 'wahr' (W) und 'falsch' (F) noch über einen weiteren Wahrheitswert 'unbekannt' (U) verfügen. Erweitern Sie die Wahrheitstafeln für die aussagenlogischen Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ und $\neg$ auf die Wahrheitswertmenge $\{W, F, U\}$. Begründen Sie Ihre Entscheidungen; falls es an einer Stelle mehrere sinnvolle Möglichkeiten zu geben scheint, weisen Sie darauf hin.

(b) Die Datenbasis eines anderen automatischen Auskunftssystems zu aktuellen Wirtschaftsnachrichten speist sich durch automatische Informationsgewinnung ('text mining') aus 10 verbreiteten deutschen Tageszeitungen. Aufgrund verschiedener Ansichten und Einschätzungen sowie unterschiedlich gründlicher Recherche wird es bisweilen vorkommen, dass sich die Tageszeitungen bezüglich der Bewertung einer Aussage unterscheiden. Das Auskunftssystem sollte also mit folgenden Wahrheitswerten umgehen können: wahr (W), falsch (F), unbekannt (U) sowie 'kontrovers' (K), wobei 'kontrovers' bedeutet, dass die Aussage A von mindestens einer Zeitung als wahr und von mindestens einer als falsch bezeichnet wird. Geben Sie wiederum die entsprechenden Erweiterungen der Wahrheitstafeln an. Begründen Sie Ihre Entscheidungen; falls es an einer Stelle mehrere sinnvolle Möglichkeiten zu geben scheint, weisen Sie darauf hin.

(c) Viele gängige Alltagsbegriffe erlauben keine sinnvolle und eindeutige Unterscheidung zwischen Objekten, auf die sie zutreffen und solchen, auf die sie nicht zutreffen, z.B. 'groß', 'schnell', 'warm' oder 'laut'. Ein Ansatz, um Aussagen mit solchen Begriffen zu formalisieren ist die Einführung von 'Wahrheitsgraden': Ein Mensch von 1.20 ist zum Grad 0 groß, einer von 2.20 zum Grad 1, der Rest 'groß mit Grad x', wobei $0 < x < 1$. Als Wahrheitswerte sind nun also alle reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ zugelassen; eine 'Wahrheitstafel' für einen Junktor $*$ ist jetzt eine Funktion $f_* : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ für $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ bzw. $f_* : [0, 1] \to [0, 1]$ für $* = \neg$. Finden Sie geeignete Definitionen für die 'Wahrheitstafeln' $f_\neg$, $f_\wedge$, $f_\vee$, $f_\to$, $f_\leftrightarrow$ und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(d) Prüfen Sie von den folgenden Aussageformen nach, ob sie (1) mit den klassischen zweiwertigen Wahrheitstafeln, (2) mit den in (a) erarbeiteten 3-wertigen Wahrheitstafeln, (3) mit den in (b) erarbeiteten 4-wertigen Wahrheitstafeln und (4) mit den in (c) erarbeiteten Wahrheitsgradfunktionen Tautologien sind, d.h. unabhängig von den Wahrheitswerten der Aussagen A, B stets den Wahrheitswert 1 erhalten:
(i) $(A \leftrightarrow \neg\neg A)$, (ii) $(A \to B) \vee (B \to A)$, (iii) $(A \vee \neg A)$, (iv) $((A \wedge \neg A) \to B)$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 06.05.2015 in der Vorlesung oder vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.