Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2015
06.05.2015
Zettel 4

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1:
(a) Es sei S die Symbolmenge einer Sprache erster Stufe, $c \in S$ ein Konstantenzeichen und Φ eine Menge von S-Sätzen mit $c \neq c \in S$, ferner ϕ ein beliebiger S-Satz. Zeige: $\Phi \models \phi$.
(b) Es sei R ein zweistelliges Relationszeichen und c ein Konstantenzeichen, $S = \{R, c\}$. Finden Sie zu jedem der folgenden S-Ausdrücken jeweils eine Interpretation, die ihn erfüllt und eine andere, die ihn nicht erfüllt: (1) $\forall x \forall y \forall z((Rxy \vee Ryz) \rightarrow Rxz)$, (2) $\forall x \exists y(Rxy \wedge Ryc)$,
(3) $\forall x((x = c \vee (Rxc \wedge \neg Rcx)) \vee (Rcx \wedge \neg Rxc))$
(c) Ein Ausdruck heiße 'negationsfrei', falls er keines der Zeichen $\neg$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ enthält. Zeige, dass jeder negationsfreie Ausdruck erfüllbar ist.

Aufgabe 2: Es sei S Symbolmenge einer Sprache erster Stufe. Ein S-Ausdruck ϕ ist 'in Quantorenform', falls er von der Form $Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n \psi$ ist, wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ für $1 \leq i \leq n$ und ψ keine Quantoren enthält. Zeige: Zu jedem S-Ausdruck ϕ existiert ein logisch äquivalenter S-Ausdruck ϕ_q in Quantorenform.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Für eine Symbolmenge S, eine Menge Φ von S-Ausdrücken und einen S-Ausdruck ϕ schreiben wir $\Phi \models_{\text{fin}} \phi$, falls für jede S-Interpretation $\mathfrak{I} = ((A, \mathfrak{a}), \beta)$ mit endlichem A gilt, dass $\mathfrak{I} \models \phi$.
(a) Es sei $S'_{\text{Äq}} = \{\sim, c_0, c_1, ...\}$ die Sprache der Äquivalenzrelationen zusammen mit abzählbar vielen Konstantenzeichen c_i. Ferner sei
$\Phi := \{\forall x x \sim x, \forall x \forall y(x \sim y \rightarrow y \sim x), \forall x \forall y \forall z((x \sim y \wedge y \sim z) \rightarrow x \sim z)\}$
die Theorie der Äquivalenzrelationen. Zeigen Sie, dass für jeden $S'_{\text{Äq}}$-Satz ϕ gilt: $\Phi \models \phi$ genau dann, wenn $\Phi \models_{\text{fin}} \phi$.
(b) Wegen (b) gilt ein $S'_{\text{Äq}}$-Satz ϕ genau dann in allen $S'_{\text{Äq}}$-Strukturen, wenn ϕ in allen $S'_{\text{Äq}}$-Strukturen mit endlicher Grundmenge gilt. Finden Sie eine Funktion $f : L_0^{S'_{\text{Äq}}} \rightarrow \mathbb{N}$ so, dass ϕ genau dann in allen $S'_{\text{Äq}}$-Strukturen gilt, wenn ϕ in allen $S'_{\text{Äq}}$-Strukturen gilt, deren Grundmenge höchstens $f(\phi)$ viele Elemente hat. Skizzieren Sie ein Verfahren, um zu entscheiden, ob ein $S'_{\text{Äq}}$-Satz allgemeingültig ist.
(c) Es sei $S_< = \{<\}$, ferner $\Phi := \{\forall x \forall y((x < y \vee y < x) \vee x = y), \forall x \forall y \neg(x < y \wedge y < x), \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)\}$ die Theorie der strikten linearen Ordnungen. Finden Sie (mit Beweis) einen $S_<$-Satz ϕ so, dass $\Phi \models_{\text{fin}} \phi$, aber $\Phi \not\models \phi$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 13.05.2015 in der Vorlesung oder vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.