Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2015
13.05.2015
Zettel 5

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Führen Sie die folgenden Substitutionen aus:
(a) $[ffxyzgxz]\frac{z\;x\;y}{x\;y\;z}$ (f dreistelliges, g einstelliges Funktionszeichen)
(b) $[((Pxy \vee Qz) \wedge \neg Qfxgy)]\frac{fzz\;ggx\;z}{x\;\;y\;\;z}$ (P zweistelliges, Q einstelliges Relationszeichen, f zweistelliges, g einstelliges Funktionszeichen)
(c) $[\exists x \exists y(Pxu \vee Pyv)]\frac{u\;u\;u}{x\;y\;v}$ (P zweistelliges Relationszeichen)
(d) $[\exists x \exists y(Pxu \vee Pyv)]\frac{v\;fxy}{u\;\;v}$ (P zweistelliges Relationszeichen)
(e) $[(\forall x \exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists u fuu \equiv x)]\frac{x\;fxy}{x\;\;u}$ (P zweistelliges Relationszeichen, f zweistelliges Funktionzeichen)

Aufgabe 2: Es sei $S_V := (K, V, +_K, \cdot_K, \cdot_s, +_V, 0_K, 1_K, 0_V)$ die Sprache der Vektorräume. Um einen Vektorraum W durch S_V zu beschreiben, fassen wir ihn auf als definiert über einer Trägermenge X, die die Vereinigung des Skalarkörpers mit der Menge der Vektoren ist. K und V sind dann einstellige Relationszeichen, die wir als Zugehörigkeit eines Elements von X zum Skalarkörper bzw. zur Menge der Vektoren interpretieren, entsprechend sind $0_K, 1_K, 0_V$ Konstantenzeichen, deren intendierte Interpretationen das neutrale Element der Addition und der Multiplikation des Skalarkörpers sowie das neutrale Element der Addition der Gruppe der Vektoren sind und $+_K, \cdot_K, \cdot_s, +_V$ zweistellige Funktionszeichen zur Darstellung der Addition und Multiplikation im Skalarkörper, der Skalarmultiplikation sowie der Vektoraddition.
(a) Schreiben Sie die Menge Φ der Vektorraumaxiome in S_V auf.
Es sei nun $M \models \Phi$. Formulieren Sie folgende Aussagen in S_V:
(b) Es existiert eine Basis mit genau 3 Elementen.
(c) Der Schnitt zweier zweidimensionaler Unterräume, die nicht identisch sind, ist ein- oder nulldimensional.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Ist $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur mit Trägermenge A und $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ ein Isomorphismus, so heißt π **Automorphismus** von $\mathfrak{A}$. Eine Teilmenge $X \subseteq A$ heißt 'definierbar in $\mathfrak{A}$', falls ein S-Ausdruck $\phi(v_0)$ mit einer freien Variablen v_0 so existiert, dass $\mathfrak{A} \models \phi[a] \leftrightarrow a \in X$ für alle $a \in A$.
(a) Zeigen Sie: In $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist $\mathbb{P}$, die Menge der Primzahlen, definierbar.
(b) Zeigen Sie: Ist $X \subseteq A$ und existiert ein Automorphismus π von $\mathfrak{A}$ mit $\{\pi(x) : x \in X\} \neq X$, so ist X in $\mathfrak{A}$ nicht definierbar.
(c) Zeigen Sie: In $(\mathbb{Z}, +)$ ist $\mathbb{N}$ nicht definierbar.
(d) Zeigen Sie: In $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist $5\mathbb{Z}$ nicht definierbar.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 20.05.2015 in der Vorlesung oder vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.