

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Im Folgenden ist $Q \in \{\forall, \exists\}$ ein Quantor. Überprüfen Sie folgende Sequenzenregeln auf Korrektheit. Beweisen Sie Ihre Antworten.

$$\begin{array}{lll}
 (a) \frac{\Gamma \phi \wedge \psi}{\Gamma \phi \vee \psi} & (b) \frac{\phi \wedge \neg \phi}{\psi} & (c) \frac{\phi \leftrightarrow \psi}{Qx\phi \leftrightarrow Qx\psi} \\
 (d) \frac{\Gamma \forall x \exists y \phi}{\Gamma \exists x \forall y \phi} & (e) \frac{\Gamma \exists x \forall y \phi}{\Gamma \forall x \exists y \phi} & (f) \frac{t \equiv t'}{ft_1 \dots t_n \equiv ft_1' \dots t_n'}
 \end{array}$$

Aufgabe 2: Es sei $\Phi_{Gr} := \{\forall x \forall y \forall z (x \circ yz \equiv x \circ yz), \forall x (x \circ x \equiv x), \forall x \exists y (x \circ y \equiv e)\}$ die Menge der Gruppenaxiome. Geben Sie Ableitungen aus Φ_{Gr} für folgende Ausdrücke im Sequenzenkalkül an:

- (a) $e \circ e \equiv e$
- (b) $\exists x x \equiv x$
- (c) $\forall x \forall y \forall z (x \circ z \equiv yz \rightarrow x \equiv y)$

Zusatzaufgabe für Interessierte: Die folgenden Argumente scheinen formal jeweils einer korrekten Sequenzenregel zu folgen, sind aber anscheinend nicht korrekt. Geben Sie in jedem Fall an, welcher Sequenzenregel scheinbar gefolgt wird, beweisen Sie (sofern noch nicht in der Vorlesung geschehen) deren Korrektheit und erklären Sie möglichst genau, wo hier das Problem liegt. Stellen Sie insbesondere heraus, warum das Argument für die Korrektheit der fraglichen Regel im vorliegenden Fall scheitert.

(I) VS1¹: 'Dieser Satz enthält fünf Wörter' VS2: 'Gras ist grün'
 Folgerung: 'Gras ist grün und dieser Satz enthält fünf Wörter'

(II) VS: 'Hätte unsere Mannschaft noch zwei Tore geschossen, so hätte unsere Mannschaft gewonnen'
 Folgerung: 'Hätte unsere Mannschaft noch zwei Tore geschossen und hätte die gegnerische Mannschaft noch drei Tore geschossen, so hätte unsere Mannschaft gewonnen'

¹'VS' steht für 'Voraussetzung'

(III) In einer Urne liegen 100 Kugeln, davon sind 10 groß und 90 klein. Von den grossen Kugeln sind außerdem 9 rot und eine ist blau. Die kleinen Kugeln sind alle blau. Eine Kugel K wird zufällig gezogen. Es gelten also:

(VS1) Wenn K groß ist, ist K wahrscheinlich rot.

(VS2) Wahrscheinlich ist K nicht rot.

Folgerung: K ist nicht groß.

(Beachten Sie, dass die Folgerung kein ‘wahrscheinlich’ mehr enthält.)

(IV) VS1: Die Alarmsirene heult nicht immer.

VS2: Wenn ein Einbruch stattfindet, heult die Alarmsirene immer.

Folgerung: Es findet kein Einbruch statt.

(V) VS1: Peter weiß, dass sein Gesprächspartner Herr Meier ist.

VS2: Herr Meier ist der mit der Überwachung von Peter beauftragte Geheimagent.

Folgerung: Peter weiß, dass sein Gesprächspartner der mit seiner Überwachung beauftragte Geheimagent ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe am 27.05.2015 in der Vorlesung oder vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.