

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: (a) Es sei $\exists A'$ die folgende Sequenzenregel:

$$\frac{\Gamma \phi \frac{y}{x} \psi}{\Gamma \exists x \phi \psi}$$

die sich aus der Regel für die \exists -Einführung im Antezedens dadurch ergibt, dass man die Bedingung, y dürfe nicht frei in $\Gamma \exists x \phi \psi$ vorkommen, fortläßt. Ist $\exists A'$ korrekt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Sequenzenregel, genannt Modus Ponens (MP), ableitbar ist:

$$\frac{\Gamma (\phi \rightarrow \psi) \quad \Gamma \phi}{\Gamma \psi}$$

Es bezeichne nun Q die folgende Sequenzenregel:

$$\frac{}{\Gamma \exists x(\phi \wedge \psi) \quad \forall x(\phi \rightarrow \psi)}$$

(c) Zeige, dass Q im Sequenzenkalkül \mathfrak{S} nicht ableitbar ist.

(d) Es sei \mathfrak{S}' derjenige Kalkül, der aus \mathfrak{S} durch Hinzunahme von Q entsteht. Ist

$$\overline{\Gamma \phi}$$

in \mathfrak{S}' ableitbar? Die Antwort ist zu beweisen.

Aufgabe 2: Es sei $S'_< = \{<, 1, 2, 3, f\}$, wobei $<$ ein zweistelliges Relationszeichen, $1, 2, 3$ Konstantenzeichen und f ein einstelliges Funktionszeichen; ferner sei $\Phi' := \{\forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y), \forall x \forall y \neg (x < y \wedge y < x), \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z), 1 < 2, 2 < 3, \forall x x < fx\}$. Finden Sie im Sequenzenkalkül (einschließlich abgeleiteter Regeln) Ableitungen für:

(a) $\Phi' 1 < 3$

(b) $\Phi' \forall x x < ffx$

(c) $\Phi' \forall v \forall w \forall x \forall y ((v < w \wedge w < x) \wedge x < y) \rightarrow v < y)$

Zusatzaufgabe für Interessierte: (25 Punkte) Es sei S die Sprache erster Stufe mit einem zweistelligen Relationszeichen R .

(a) Überlegen Sie sich geeignete Darstellungen für S -Ausdrücke und Sequenzen von S -Ausdrücken und schreiben Sie ein Programm, das einen vermeintlichen Beweis im Sequenzenkalkül auf Korrektheit überprüft: Die Eingabe für das Programm soll also eine endliche Folge $(Z_i : 1 \leq i \leq n)$ von Paaren der Form (Γ, info) sein, wobei Γ eine Sequenz ist und ‘info’ die Sequenzenregel enthält, nach der sie abgeleitet wurde sowie, falls nötig, weitere Informationen über die Beweiszeilen, auf die die Regel angewendet wurde, substituierte Terme etc.; die Ausgabe soll ‘Ja’ lauten, falls die Eingabe ein korrekter Beweis im Sequenzenkalkül ist (also jede Sequenz auf die in ‘info’ angegebene Weise erhalten werden kann), andernfalls ‘Nein’. (20 Punkte)

(b) Es sei $S_{<} = \{<\}, \Phi := \{\forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y), \forall x \forall y \neg (x < y \wedge y < x), \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)\}$. Übertragen Sie die Ableitung aus Aufgabe 2 (c) in das Eingabeformat Ihres Programms. (5 Punkte)

Hinweis: Das Programm ist Ihrem Tutor in elektronischer Form und als Ausdruck zu übermitteln. Zu einer Bearbeitung von (a) gehört eine Dokumentation, also eine Erläuterung des Eingabeformats sowie eine Erklärung, wie das Programm funktioniert und warum. Als Sprachen zugelassen sind C, C++, Java, Python, R, Matlab und Prolog. Sie dürfen in (a) annehmen, dass die Eingabe im von Ihnen spezifizierten Eingabeformat erfolgt, das also insbesondere nur syntaktisch korrekte Ausdrücke eingegeben werden. Die Verwendung abgeleiteter Regeln müssen Sie nicht ermöglichen (dürfen es aber).

Bei den Aufgaben 1 und 2 sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 03.06.2015 in der Vorlesung oder vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.