

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1:

Es sei \mathfrak{L}_{PA} die Sprache mit zweistelligen Funktionszeichen $+$, \cdot sowie dem zweistelligen Relationszeichen $<$ und den Konstantenzeichen $0, 1$. Σ_{TA} (für ‘True Arithmetic’) bestehe aus allen \mathfrak{L}_{PA} -Sätzen, die (mit der üblichen Interpretation der Symbole) in \mathbb{N} gelten. Nun sei c ein neues Konstantenzeichen. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Menge $\Sigma' := \Sigma_{TA} \cup \{c > i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist widerspruchsfrei.

Aufgabe 2: Ein Term heiße ‘konstant’, wenn er keine Variablen enthält.

(a) Es sei $S_K := \{+, \cdot, 0, 1\}$ die Sprache der Theorie der Körper. Finden Sie (mit Beweis) alle Körper (bis auf Isomorphie) $\mathbb{K} = (K, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}})$ mit $K = \{t^{\mathbb{K}} : t \text{ ist ein konstanter } S_K\text{-Term}\}$.

(b) Es sei nun $S'_K := S_K \cup \{-, \div\}$. Ist $\mathbb{K} = (K, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}})$ ein Körper, $a, b \in K$, so interpretieren wir $a - b$ als $a +_{\mathbb{K}} (-b)$, wobei $-b$ das additive Inverse von b bezeichnet sowie $a \div 0$ als 0 und $a \div b$ für $b \neq 0$ als $a \cdot_{\mathbb{K}} b^{-1}$, wobei b^{-1} das multiplikative Inverse von b bezeichnet. Finden Sie (mit Beweis) alle Körper (bis auf Isomorphie) \mathbb{K} mit $K = \{t^{\mathbb{K}} : t \text{ ist ein konstanter } S'_K\text{-Term}\}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Zwei S -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} heißen ‘elementar quivalent’, wenn in ihnen die gleichen S -Sätze gelten.

(a) Zeigen Sie: Ist S endlich und sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ endliche S -Strukturen, so sind \mathfrak{A} und \mathfrak{B} genau dann elementar quivalent, wenn sie isomorph sind.

(b) Zeigen Sie: Ist $S = \emptyset$, so sind \mathbb{R} und \mathbb{Q} als S -Strukturen zwar elementar quivalent, aber nicht isomorph.

Bei den Aufgaben 1 und 2 sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 10.06.2015 in der Vorlesung oder vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.