Fachbereich Mathematik und Statistik | SS 2015
der Universität Konstanz | 10.06.2015
Dr. Merlin Carl | Zettel 9

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Es sei S eine Symbolmenge.
(a) Zeigen Sie: Es existiert eine Menge T von S-Sätzen so, dass für eine S-Struktur $\mathfrak{M}$ mit Trägermenge M genau dann $\mathfrak{M} \models T$ gilt, wenn M unendlich ist.
(b) Zeigen Sie: Falls T der in (a) formulierten Bedingung genügt, ist T unendlich.
(c) Es sei $S_{\mathrm{Gr}} = \{\circ, e\}$ wieder die Sprache der Gruppen. Zeigen Sie: Es existiert keine (endliche oder unendliche) S_{Gr}-Satzmenge T so, dass $\mathfrak{G} \models T$ für eine S_{Gr}-Struktur $\mathfrak{G}$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe ist.

Aufgabe 2: Zu einer Ausdrucksmenge Φ bezeichne $\mathfrak{I}^{\Phi}$ die zugehörige Terminterpretation.
(a) Finden Sie eine Symbolmenge S und eine widerspruchsfreie Menge Φ von S-Ausdrücken so, dass Φ Beispiele enthält und $\mathfrak{I}^{\Phi} \not\models \Phi$.
(b) Finden Sie eine Symbolmenge S und eine negationstreue, widerspruchsfreie Menge Φ von S-Ausdrücken so, dass $\mathfrak{I}^{\Phi} \not\models \Phi$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (25 Punkte)
Ein Graph G ist ein Paar (V, E), wobei V eine Menge ist und $E \subseteq V \times V$ symmetrisch und irreflexiv. Die Sprache S_{Gr} der Graphentheorie hat ein zweistelliges Relationszeichen R, dessen Interpretation E ist. G heißt endlich, falls V endlich ist. Eine Grapheneigenschaft $\mathcal{E}$ ist eine Teilmenge der Menge der endlichen Graphen, für die ein S_{Gr}-Satz ϕ existiert mit $G \in \mathcal{E}$ gdw. $G \models \phi$ für alle endlichen Graphen G.
Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne G_n die Menge der Graphen (V, E) mit $V = \{0, ..., n\}$.

(a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $|G_n| = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $A_{m,n} := \forall x_1 ... \forall x_m \forall y_1 ... \forall y_n \exists z(\bigwedge_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} x_i \not\equiv y_j \rightarrow (\bigwedge_{1 \leq i \leq m} Rzx_i \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \neg Rzy_j))$. Anschaulich besagt $A_{m,n}$ also, dass zu jeder m-elementigen Eckenmenge X und jeder zu X disjunkten n-elementigen Eckenmenge Y eine Ecke z existiert, die mit allen Elementen von X, aber keinem von Y verbunden ist. Mit WDW ('was du willst') bezeichnen wir die Satzmenge $\{A_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Zeigen Sie: Sind $(V_1, E_1) = G_1 \models$WDW und $(V_2, E_2) = G_2 \models$WDW abzählbar, so sind G_1 und G_2 isomorph.[1]

(c) Folgern Sie: Für jeden S_{Gr}-Satz ϕ gilt WDW$\vdash \phi$ oder WDW$\vdash \neg\phi$.

(d) Folgern Sie weiter: Für jeden S_{Gr}-Satz ϕ existiert eine endliche Menge $T_\phi \subseteq$WDW mit $T \vdash \phi$ oder $T \vdash \neg\phi$.

Es sei nun ϕ der zu $\mathcal{E}$ gehörige S_{Gr}-Satz. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Element von G_n die Eigenschaft $\mathcal{E}$ hat, gleich $\sigma_n^\phi := \frac{|\mathcal{E} \cap G_n|}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$. Wir können also $W_\phi := \lim_{n\to\infty} \sigma_n^\phi$ als die Wahrscheinlichkeit interpretieren, dass ein zufällig gewählter endlicher Graph die Eigenschaft $\mathcal{E}$ hat.

(e) Zeigen Sie: Ist $\phi \in$WDW, so ist $W_\phi = 1$.

(f) Folgern Sie: Ist $T \subseteq$WDW endlich und ϕ_T die Konjunktion aller Elemente von T, so ist $W_{\phi_T} = 1$.

(g) Folgern Sie: Ist $\mathcal{E}$ eine Grapheneigenschaft und ϕ der zugehörige S_{Gr}-Satz, so ist $W_\phi = 0$ oder $W_\phi = 1$, d.h. für jede Grapheneigenschaft $\mathcal{E}$ hat ein zufällig gewählter endlicher Graph die Eigenschaft $\mathcal{E}$ entweder mit Wahrscheinlichkeit 0 oder mit Wahrscheinlichkeit 1.

Bei den Aufgaben 1 und 2 sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 17.06.2015 in der Vorlesung oder vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihres Übungsleiters.

[1] Tipp: Es seien $(v_i^1 : i \in \mathbb{N})$ und $(v_i^2 : i \in \mathbb{N})$ Aufzählungen von V_1 bzw. V_2. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $f : G_1 \simeq G_2$ schrittweise durch eine aufsteigende Folge $(f_i : i \in \mathbb{N})$ partieller Funktionen: Falls im $2n$-ten Schritt noch kein $v \in V_2$ mit $f_{2n-1}^{-1}(v) = v_n^1$ existiert, so benutzen Sie WDW, um zu zeigen, dass ein $w \in V_2$ so existiert, dass für alle $v' \in \mathrm{dom}(f_{2n-1})$ gilt: $E_2 w f_{2n-1}(v')$ gdw. $E_1 v_n v'$. Setzen Sie $f_{2n}(v_n) = w$ und $f_{2n}(v) = f_{2n-1}(v)$ für $v \in \mathrm{dom}(f_{2n-1})$; verfahren Sie analog im $(2n+1)$-ten Schritt mit v_n^2. Zeigen Sie schließlich, dass $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ Isomorphismus von G_1 und G_2 ist.