Fachbereich Mathematik und Statistik der Universität Konstanz
Merlin Carl
Katharina Dupont

SS 2014
09.07.2014
Zettel 10

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1: Es sei κ eine reguläre Kardinalzahl. Zeigen Sie: Es existiert eine singuläre Kardinalzahl λ mit $cf(\lambda) = \kappa$.

Aufgabe 2: Es sei λ eine unendliche Kardinalzahl, $cf(\lambda) = \theta$. Zeigen Sie: Es existiert eine normale (also stetige und ordnungserhaltende) Funktion $f : \theta \to \lambda$ derart, dass $f[\theta]$ kofinal in λ ist.

Aufgabe 3:
Die ordinale Exponentiation zur Basis ω ist rekursiv definiert durch: $\omega^0 = 1$, $\omega^{\alpha+1} = \omega \cdot \omega^\alpha$ und $\omega^\lambda = \bigcup_{\iota<\lambda} \omega^\iota$ für eine Limesordinalzahl λ. Nun sei $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{i+1} = \omega^{\alpha_i}$, $\alpha_\omega = \bigcup_{i<\omega} \omega^i$. Zeigen Sie:
a) Für jedes $0 < i \in \omega$ ist α_i abzählbar.
b) α_ω ist abzählbar.

Aufgabe 4: Es sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Es sei ferner $(f_\iota | \iota < \kappa)$ eine Folge von Elementen von ${}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa$. Zeige mit einem Diagonalargument (insbesondere ohne Verwendung von Königs Lemma), dass eine Funktion $f \in^{\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa$ existiert, die von allen f_ι mit $\iota < \kappa$ verschieden ist. Folgere, dass $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (Kardinale Exponentiation unter GCH)
Die verallgemeinerte Kontinuumshypothese GCH ist die Behauptung, dass $2^\kappa = \kappa^+$ für jede unendliche Kardinalzahl κ. Seien ferner κ, λ unendliche Kardinalzahlen. Leiten Sie folgende Aussagen aus GCH her:
(a) Ist $\kappa \leq \lambda$, so ist $\kappa^\lambda = \lambda^+$
(b) Ist $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa$, so ist $\kappa^\lambda = \kappa^+$.
(c) Ist $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, so ist $\kappa^\lambda = \kappa$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 16.07.2014 bis 11.45 in Briefkasten 11.