Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Merlin Carl
Katharina Dupont

SS 2014
16.07.2014

Zettel 11

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:
(a) Zeigen Sie: Gilt GCH, so sind die stark unerreichbaren Kardinalzahlen gerade die schwach unerreichbaren Kardinalzahlen.
(b) Eine Ordinalzahl κ heißt 'weltartig', falls alle ZFC-Axiome in V_κ gelten. Zeigen Sie: Ist κ stark unerreichbar, so ist κ weltartig.

Aufgabe 2: Es sei κ eine unendliche Kardinalzahl und $(\kappa_\iota|\iota < \theta)$ eine in κ kofinale Folge von Kardinalzahlen. Zeigen Sie: Dann ist $\Pi^\sharp_{\iota<\theta}\kappa_\iota > \kappa$.

Aufgabe 3: Eine reelle Zahl x heißt 'transzendent', falls kein $0 \neq q \in \mathbb{Q}[X]$ existiert mit $q(x) = 0$. Es sei $\mathbb{T}$ die Menge der transzendenten reellen Zahlen. Zeigen Sie: $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{T}| = \aleph_0$. Folgern Sie: $|\mathbb{T}| = |\mathbb{R}|$.

Aufgabe 4: Beweisen Sie die Existenz einer überabzählbaren Ordinalzahl, ohne das Auswahlaxiom zu benutzen.
(**Tipp**: Nehmen Sie an, alle Ordinalzahlen seien (höchstens) abzählbar und arbeiten Sie auf einen Widerspruch hin: Sei dazu $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Ist α unendlichen $\alpha \in On$ und $f : \omega \to \alpha$ bijektiv, so können wir die Menge $\{p(i, j)|i, j \in \omega \wedge f(i) < f(j)\} \subseteq \omega$ als 'Code' für α auffassen. Zeigen Sie zunächst, dass diese Codes eine Menge bilden und benutzen Sie dann Ersetzung, um zu folgern, dass On eine Menge ist - womit der gewünschte Widerspruch gefunden ist.)

Zusatzaufgabe für Interessierte: Angenommen, es gelte die Kontinuumshypothese CH, inbesondere sei also $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Sei $Q := [0,1] \times [0,1]$ das reelle Einheitsquadrat, ferner $\leq^*$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $\aleph_1$ auf Q und $M := \{(x,y) \in Q | x <^* y\}$.
a) Zeigen Sie: Dann ist für jedes $a \in [0,1]$ die a-te 'Zeile'
$Z_a := \{(x,a) | x \in [0,1] \wedge x <^* a\}$ von M abzählbar und für die a-te 'Spalte'
$S_a := \{(a,y) | y \in [0,1] \wedge a <^* y\}$ ist $[0,1] - S_a$ abzählbar.

Aus der Analysis kennen Sie die folgende Konsequenz des Satzes von Fubini: Ist $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ meßbar und $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y) d(x,y) < \infty$, so ist

$$\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx = \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy = \int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)d(x,y).$$

Als SF ('starker Fubini') bezeichnet man nun die folgende, nahe liegende Verschärfung: Ist $g : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ so, dass die beiden Integrale $\int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dy)dx$ und $\int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dx)dy$ definiert und endlich sind, so ist $\int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dy)dx = \int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dx)dy$.

b) Folgern Sie aus a): Ist CH richtig, so ist SF falsch. (Tipp: Betrachten Sie die charakteristische Funktion der Menge M.)

Bemerkung: In Verbindung mit der Unbeweisbarkeit von $\neg CH$ in ZFC folgt damit, dass SF in ZFC nicht beweisbar ist. Mit der Cohenschen Forcing-Methode läßt sich auch zeigen, dass $\neg SF$ in ZFC ebenfalls nicht beweisbar ist. Die starke Version des Satzes von Fubini ist also in ZFC nicht entscheidbar.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 23.07.2014 bis 11.45 in Briefkasten 11.