

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:

Zeigen Sie: Ist $\alpha \in On$, so ist $V_\alpha = \bigcup_{\iota < \alpha} \mathfrak{P}(V_\iota)$.

Aufgabe 2: (Formalisierung) Geben Sie (mit Beweis) Formeln in der Sprache der Mengenlehre für die folgenden Aussagen an. Führen Sie geeignete Abkürzungen ein.

- (x, \leq) ist eine partielle Ordnung.
- x ist eine Nachfolgerordinalzahl.
- x ist eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 3: Für $\alpha \in On$ und $i \in \omega$ definieren wir $\alpha + i$ rekursiv durch $\alpha + 0 = \alpha$ und $\alpha + (i + 1) = (\alpha + i) + 1$.

- Zeigen Sie: Ist $\lambda \in On$, so ist λ entweder Limesordinalzahl oder es existieren eine Limesordinalzahl γ und eine Ordinalzahl $i \in \omega$ derart, dass $\lambda = \gamma + i$.
- Zeigen Sie: Ist $f := (\alpha_i)_{i \in \omega}$ eine unendliche Folge von Ordinalzahlen, so existiert eine unendliche, monoton wachsende Teilfolge $f' = (\alpha_{i_j})_{j \in \omega}$ von f . (Eine Folge $(\beta_i)_{i < \gamma}$ von Ordinalzahlen heißt monoton wachsend, falls $\forall i, j \in \gamma (i < j \rightarrow \beta_i \leq \beta_j)$.)

Aufgabe 4: Für eine Menge x sei $rk(x)$ der Rang von x , d.h. die kleinste Ordinalzahl γ derart, dass $x \in V_{\gamma+1}$. Zeigen Sie:

- $\forall \alpha \in On \forall \beta \in On (\alpha < \beta \rightarrow V_\alpha \subset V_\beta)$.
- $\{\beta \mid \beta \in V_\alpha \wedge \beta \in On\} = \alpha$.
- $x \in y$ impliziert $rk(x) < rk(y)$.
- Gilt für Mengen x, y stets $x \subset y \rightarrow rk(x) < rk(y)$?
Was ist mit $x \subseteq y \rightarrow rk(x) \leq rk(y)$?

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $(\phi_i \mid i \in \omega)$ eine effektive Aufzählung der *LAST*-Formeln in einer freien Variablen. Zeigen Sie: Es existiert keine Wahrheitsdefinition in *LAST*, d.h. es existiert keine *LAST*-Formel $\psi(n, x)$ derart, dass für alle $n \in \omega$ und alle Mengen x die Formel $\psi(n, x)$ genau dann gilt, wenn $\phi_n(x)$ gilt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 21.05.2014 bis 10.00 in Briefkasten 11.