Fachbereich Mathematik und Statistik — SS 2014
der Universität Konstanz — 21.05.2014
Merlin Carl
Katharina Dupont — Zettel 4

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:
(a) Zeigen Sie: Es existiert keine Menge x mit $x \in x$. (1 Punkte)
(b) Ist $\{\alpha | \alpha \text{ ist Limesordinalzahl}\}$ eine Menge? Beweisen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)
(c) Welche der Axiome von ZF gelten in V_ω? Geben Sie zu jedem Axiom eine kurze Begründung Ihrer Antwort. (3 Punkte)
(d) Welche der Axiome von ZF gelten in On? (3 Punkte)
(Ist A eine Klasse, so 'gilt eine $LAST$-Formel ϕ in A', falls die Formel ϕ^A, die aus ϕ dadurch entsteht, dass man jeden Quantor $\forall x$ bzw. $\exists x$ in ϕ durch den beschränkten Quantor $\forall x \in A$ bzw. $\exists x \in A$ ersetzt, wahr ist.)

Aufgabe 2:
(a) Es sei eine Folge $(a_i | i \in \omega)$ von Mengen rekursiv definiert durch $a_0 = \emptyset$, $a_{i+1} = \{a_i\}$. Zeigen Sie mit den ZF-Axiomen, dass die Menge $\{a_i | i \in \omega\} := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, ...\}$ existiert.
(b) Zeigen Sie nun axiomatisch, dass die Ordinalzahl $\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, ...\}$ existiert. (Tipp: (a) kann hilfreich sein.)

Aufgabe 3: Zeigen Sie: Ist x eine transitive Menge und sind alle Elemente von x transitiv, so ist x eine Ordinalzahl.

Aufgabe 4: Eine Menge x heißt 'erblich endlich', falls x endlich ist und alle Elemente von x erblich endlich sind.
(a) Drücken Sie 'x ist erblich endlich' durch eine $LAST$-Formel aus.
(b) Zeigen Sie: $\{x | x \text{ ist erblich endlich}\} = V_\omega$.

Zusatzaufgabe für Interessierte:
(a) Leiten Sie die Existenz einer leeren Menge aus den übrigen ZF-Axiomen her. (1 Punkt)
(b) Leiten Sie das Aussonderungsaxiom aus den übrigen ZF-Axiomen her. (4 Punkte)
(Tipp: Sei $\phi(x)$ eine $LAST$-Formel und M eine Menge. O.B.d.A. nehmen wir an, es existiere ein $a \in Z$ mit $\phi(a)$. Konstruieren Sie eine funktionale $LAST$-Formel $\psi(x, y)$ derart, dass $\psi(x, y)$ genau dann gilt, wenn $x \in M$, $\phi(x)$ und $x = y$ oder $\neg(x \in Z \wedge \phi(x))$ und $y = a$. Verwenden Sie nun das Ersetzungsaxiom, um $\{z \in Z : \phi(z)\}$ zu erhalten.)
(c) Es sei $\omega + \omega = \bigcup_{i \in \omega} \omega + i$. Zeige: In $V_{\omega+\omega}$ gelten alle Axiome von Z, das Ersetzungsaxiom aber ist in $V_{\omega+\omega}$ falsch.
(Z bezeichne hier die ZF-Axiome ohne das Ersetzungsaxiom. Zur Bedeutung von 'gelten in $V_{\omega+\omega}$' vgl. die Bemerkung nach Aufgabe 1)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 28.05.2014 bis 10.00 in Briefkasten 11.