Fachbereich Mathematik und Statistik — SS 2014
der Universität Konstanz — 28.05.2014
Merlin Carl
Katharina Dupont — Zettel 5

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1: Verwenden Sie das Rekursionsprinzip in der Formulierung aus der Vorlesung, um zu zeigen:
a) Es existiert eine Funktion $f:\omega\to\omega$ derart, dass $f(i)$ die i-te Fibonaccizahl ist.
(Die Fibonaccizahlen sind definiert durch $F_0 = F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ für $n \in \omega$.)
b) Es existiert eine Funktion $f:\omega\to\omega$ derart, dass $f(i) = i!$, wobei $0! = 1$ und $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.
(In beiden Aufgaben dürfen Sie die Operationen $+$ und $\cdot$ für endliche Ordinalzahlen ohne weitere Erklärung verwenden.)

Aufgabe 2: ($\in$-Isomorphismen transitiver Mengen)
Sei C eine transitive Menge. Wieviele Bijektionen f von C auf sich selbst gibt es mit der Eigenschaft, dass

$$\forall x \in C \forall y \in C((x \in y) \leftrightarrow (f(x) \in f(y)))?$$

Aufgabe 3:
(a) Es sei α eine Ordinalzahl. Zeigen Sie: α ist genau dann Limesordinalzahl, wenn $\alpha = \bigcup \alpha$. (3 Punkte)
(b) Wir definieren rekursiv eine Klassenfunktion $f : V \to On$ durch
$f(x) = sup(\{f(y) + 1 | y \in x\})$. Zeigen Sie (z.B. mit transfiniter Induktion):
$f(x) = rk(x)$ für alle $x \in V$. (7 Punkte)

Aufgabe 4: Als 'ordinale Ersetzung' bezeichnen wir folgende Aussage: Ist $F : V \to V$ eine Klassenfunktion und $\alpha \in On$, so ist $F[\alpha]$ eine Menge. Außerdem bezeichne Z die ZF-Axiome ohne [Ers]. Zeigen Sie, dass unter Z ordinale Ersetzung und der Rekursionssatz über Ordinalzahlen äquivalent sind.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (Rekursion impliziert Wohlfundiertheit.)
(a) Sei $(X, \leq)$ eine linear geordnete Menge mit folgender Eigenschaft:
Zu jeder funktionalen $LAST$-Formel $\phi(x, y, z, \vec{p})$ und jeder endlichen Folge $\vec{p}$ von Mengen existiert eine eindeutige Funktion $f : X \to V$ derart, dass $\phi(x, f \restriction x, f(x), \vec{p})$ für alle $x \in X$ gilt.
Zeigen Sie: $(X, \leq)$ ist Wohlordnung. (4 Punkte)
(b) Zeigen Sie: Die Folgerung bleibt richtig, wenn man in (a) 'eine eindeutige' ersetzt durch 'höchstens eine', also lediglich Eindeutigkeit, nicht aber Existenz fordert. (3 Punkte)
(c) Zeigen Sie nun, dass die Folgerung ebenfalls richtig bleibt, wenn man in (a) nur die Existenz einer Funktion fordert, nicht aber deren Eindeutigkeit. (3 Punkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 04.06.2014 bis 11.45 in Briefkasten 11.