Fachbereich Mathematik und Statistik | SS 2014
der Universität Konstanz | 11.06.2014
Merlin Carl
Katharina Dupont | Zettel 7

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:
a) Geben Sie zu je zweien der folgenden Summen von Ordinalzahlen an, ob sie gleich sind. Begründen Sie Ihre Antwort.
$1+\omega+\omega^2$, $1+\omega^2+\omega$, $\omega+1+\omega^2$, $\omega+\omega^2+1$, $\omega^2+1+\omega$, $\omega^2+\omega+1$. (5 Punkte)
b) Beweisen Sie: Jede Ordinalzahl β ist auf genau eine Weise in der Form $\beta=\omega^2\cdot\alpha+\omega\cdot m+n$ darstellbar, wobei $\alpha\in On$ und $m,n\in\omega$. (5 Punkte)

Aufgabe 2:
a) Beweisen Sie: Sind α, β und γ Ordinalzahlen, so gilt $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$. (6 Punkte)
b) Gilt für Ordinalzahlen α, β und γ stets $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$? (4 Punkte)

Aufgabe 3:
(a) Für $\iota\in On$ sei δ_ι die ι-te Limesordinalzahl. Existiert ein $0\neq\alpha\in On$ mit $\alpha=\delta_\alpha$? Beweisen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)
(b) Zeigen Sie: Sind α,β,γ Ordinalzahlen, so ist $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$. (5 Punkte)

Aufgabe 4:
(a) Zeigen Sie: Zu jeder höchstens abzählbaren (siehe Zettel 5) Ordinalzahl α existiert eine streng monoton wachsende Funktion $f:\alpha\to\mathbb{R}$, d.h.: Jede höchstens abzählbare Ordinalzahl kann ordnungserhaltend in die reellen Zahlen eingebettet werden. (8 Punkte)
(b) Gilt diese Aussage auch noch, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q}$ ersetzt? (2 Punkte)

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien α und β Ordinalzahlen. Eine Ordinalzahl γ ist ein gemeinsames Linksvielfaches von α und β, falls Ordinalzahlen α', β' existieren mit $\alpha' \cdot \alpha = \gamma = \beta' \cdot \beta$. Entsprechend heißt γ gemeinsames Rechtsvielfaches von α und β, falls Ordinalzahlen α' und β' existieren mit $\alpha \cdot \alpha' = \gamma = \beta \cdot \beta'$.
Beweisen oder widerlegen Sie:
a) Je zwei Ordinalzahlen haben ein gemeinsames Rechtsvielfaches. (5 Punkte)
b) Je zwei Ordinalzahlen haben ein gemeinsames Linksvielfaches. (5 Punkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 18.06.2014 bis 11.45 in Briefkasten 11.