Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2012
13.06.2012
Zettel 8

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1: Ordnen Sie die folgenden Mengen nach aufsteigender bzw. gleicher Mächtigkeit. Beweisen Sie Ihre Antworten.
(1) Das abgeschlossene reelle Einheitsintervall $[0, 1]$
(2) Das offene reelle Intervall $]2, 5[$
(3) ω
(4) $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die Menge der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$
(5) Die Menge der irrationalen Zahlen
(6) $\omega^{<\omega}$, die Menge der endlichen Folgen natürlicher Zahlen
(7) $\mathbb{C}$

Aufgabe 2:
a) Es sei $(A_i | i \in \omega)$ eine Folge von Mengen mit mit folgenden Eigeschaften:

- $\forall i \in \omega A_i \subset \omega$
- $\forall i < j \in \omega A_i \supset A_j$
- $\forall i \in \omega |A_i| = \omega$

Welche Werte kann $|\bigcap_{i\in\omega} A_i|$ annehmen? (5 Punkte)
b) Zeigen Sie: Es existieren beliebig große $\alpha \in On$ derart, dass $\alpha = \aleph_{\aleph_\alpha}$.
(5 Punkte)

Aufgabe 3: Es seien $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ lineare Ordnungen. Ein Injektion $f : (A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ heißt ordnungserhaltende Einbettung, falls $\forall x, y \in A((x \leq_A y) \implies (f(x) \leq_B f(y)))$ Beweisen Sie:
a) Es existiert keine ordnungserhaltende Einbettung von ω_1 in $\mathbb{Q}$. (2 Punkte)
b) Es existiert keine ordnungserhaltende Einbettung von ω_1 in $\mathbb{R}$. (8 Punkte)

Aufgabe 4: Zeigen Sie: Es existiert eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der reellen Ebene, die von jeder Geraden in genau zwei Punkten geschnitten wird.
(Tipp: Wählen Sie eine Wohlordnung mit minimalem Ordnungstyp auf der Menge der Geraden und definieren Sie X dann rekursiv.)

Zusatzaufgabe für Interessierte: Die Elemente von $\mathfrak{P}(\omega)$ sind sehr gesellig und möchten eine große Party veranstalten, bei der überabzählbar viele von ihnen zusammenkommen sollen. Allerdings mögen sie es überhaupt nicht, wenn sie zu eng beieinander stehen müssen, und wenn zwei verschiedene Partygäste eine unendliche Schnittmenge haben, geraten sie in Streit. Zeigen Sie, dass eine Gästeliste für eine überabzählbare Party existiert, bei der keine zwei Gäste in Streit geraten.
(Anders gesagt: Finden Sie eine überabzählbare Familie $\mathfrak{F}$ von Teilmengen von ω derart, dass $|x \cap y|$ für alle $x \neq y \in \mathfrak{F}$ endlich ist.)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 27.06.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.