Fachbereich Mathematik und Statistik | SS 2014
der Universität Konstanz | 02.07.2014
Merlin Carl
Katharina Dupont | Zettel 9

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Card $= \omega \cup \{\aleph_\iota | \iota \in On\}$, d.h. zu jeder unendlichen Kardinalzahl κ existiert ein $\iota \in On$ mit $\kappa = \aleph_\iota$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie für beliebige Kardinalzahlen κ, λ, μ:
(i) $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$.
(ii) $\kappa^\lambda \cdot \mu^\lambda = (\kappa \cdot \mu)^\lambda$.
(iii) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)}$.

Aufgabe 3:
a) Sei V ein K-Vektorraum mit Basis B. Bestimmen Sie $|V|$ in Abhängigkeit von $|K|$ und $|B|$. Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für das Ergebnis. Führen Sie ggf. eine geeignete Fallunterscheidung durch.
b) Sei K ein Körper, $\bar{K}$ sein algebraischer Abschluss. Bestimmen Sie $|\bar{K}|$ in Abhängigkeit von $|K|$. Vereinfachen Sie das Ergebnis auch hier so weit wie möglich.

Aufgabe 4: Zeigen Sie: $2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ die Menge der Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wir definieren folgende Ordnung auf ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$:

$$f_1 < f_2 \text{ gdw. } |\{k \in \mathbb{N} | f_1(k) \geq f_2(k)\}| < \omega \text{ für } f_1, f_2 \in^{\mathbb{N}} \mathbb{N}.$$

Ist $f_1 < f_2$, so sagen wir auch, f_2 sei 'fast überall größer' als f_1.
Zeigen Sie: Es existiert eine Folge $(f_\iota)_{\iota<\omega_1}$ von Elementen von ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, die in $<$ streng monoton wächst.
(Tipp: Definieren Sie die Folge durch Rekursion über ι und nutzen Sie die Abzählbarkeit der Indizes, um die bereits erzeugten Anfangsabschnitte im Ordnungstyp ω anzuordnen.)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 09.07.2014 bis 11.45 in Briefkasten 11.