0.1 Lemma. *Seien X, Y Mengen. Dann ist $|X| \leq |Y|$ genau dann, wenn eine Injektion $f : X \to Y$ existiert.*

Beweis. Sei $|X| = \kappa, |Y| = \lambda, i : \kappa \xleftrightarrow{1:1} X$ und $j : \lambda \xleftrightarrow{1:1} Y$.
„$\Rightarrow$" Angenommen, $|X| \leq |Y|$, d.h. $\kappa \leq \lambda$. Dann ist $f : X \to Y$ gegeben durch $f = j \circ i^{-1}$ offenbar injektiv.
„$\Leftarrow$" Sei nun $f : X \to Y$ injektiv. Dann ist auch $g : \kappa \to \lambda$, gegeben durch $g = j^{-1} \circ f \circ i$ eine Injektion. Sei $U = g[\kappa]$. Dann ist $|U| = \kappa$. Sei $\gamma = \mathrm{otp}(U)$. Sei $h : \gamma \to U$ ein Ordnungsisomorphismus.
Angenommen, $\gamma > \lambda$. Dann wäre $\lambda \in \mathrm{dom}(h)$, also $h(\lambda) \in \lambda$ und damit $h(\lambda) < \lambda$; wir wissen aber, dass für ordnungserhaltendes $h : \lambda \to \lambda$ und $\alpha < \lambda$ stets $\alpha \leq f(\alpha)$ gilt, ein Widerspruch. Also ist $\gamma \leq \lambda$. Es folgt $|\gamma| \leq \lambda$. Da $\kappa = |U| = |\gamma|$, ist $\kappa \leq \lambda$. $\square$

0.2 Theorem (Schröder-Bernstein oder Cantor-Bernstein)**.** *Seien X, Y Mengen, ferner $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Injektionen. Dann ist $X \equiv Y$, d.h. es existiert eine Bijektion $h : X \xleftrightarrow{1:1} Y$.*

Beweis. Nach 0.1 ist $|X| \leq |Y|$ und $|Y| \leq |X|$, also $|X| = |Y|$. $\square$

0.3 Lemma. *Es seien X, Y nichtleere Mengen. Genau dann existiert ein injektives $f : X \to Y$, wenn ein surjektives $g : Y \to X$ existiert.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $f : X \to Y$ injektiv, ferner $x_0 \in X$ beliebig. Definiere $g : Y \to X$ durch

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{falls } y \in f[X] \\ x_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist g offenbar surjektiv.
„$\Leftarrow$" Sei nun $g : Y \to X$ surjektiv. Definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf Y durch $y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow g(y_1) = g(y_2)$. Zu $y \in Y$ sei $[y]_\sim$ die Äquivalenzklasse von y bezüglich $\sim$. Dann ist $\{[y]_\sim \mid y \in Y\}$ eine Familie paarweise disjunkter nichtleerer Mengen. Nach AC sei h eine Auswahlfunktion für A. Definiere nun $f : X \to Y$ durch $f(x) = h(g^{-1}[x])$. Dann ist f offenbar injektiv. $\square$

0.4 Korollar. *Eine Ordinalzahl α ist genau dann eine Kardinalzahl, wenn es kein $\beta < \alpha$ gibt, so dass ein $f : \beta \xrightarrow{surj.} \alpha$ existiert.*

0.5 Theorem. *Für jede Menge X ist $|X| < |\mathcal{P}(X)|$. Insbesondere existiert zu jeder Kardinalzahl κ eine größere Kardinalzahl.*

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $X \not\equiv \mathcal{P}(X)$. Also ist $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ oder $|X| > |\mathcal{P}(X)|$. Da $s : X \to \mathcal{P}(X), s(x) := \{x\}$ für alle $x \in X$ offenbar injektiv ist, ist $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. Es folgt $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.
Ist nun $\kappa \in \mathrm{Card}$, so ist $|\mathcal{P}(\kappa)|$ eine größere Kardinalzahl. $\square$

0.6 Definition. Ist κ eine Kardinalzahl, so bezeichnet κ^+ den kardinalen Nachfolger von κ, d.h. die kleinste Kardinalzahl, die größer als κ ist.

0.7 Bemerkung. Wir haben **nicht** gezeigt, dass $\kappa^+ = |\mathcal{P}(\kappa)|$ für κ unendlich gilt. Diese Behauptung heißt verallgemeinerte Kontinuumshypothese (GCH). GCH ist in ZFC weder beweis- noch widerlegbar. CH, die Kontinuumshypothese, ist die Behauptung, dass $|\mathcal{P}(\omega)| = \omega^+$.

Wir können also unendliche Kardinalzahlen $\omega, \omega^+, \omega^{++}, \dots$ konstruieren. Diese bezeichnen wir mit $\omega_0 = \omega, \omega_1 = \omega^+, \omega_2 = \omega_1^+, \dots$
Frage: Sind das alle? Nein!

0.8 Theorem. *Sei $(\kappa_\iota \mid \iota < \lambda)$ eine wachsende Folge von Kardinalzahlen (Kn). Dann ist auch $\kappa := \bigcup_{\iota<\lambda} \kappa_\iota$ eine Kardinalzahl. Ist $(\kappa_\iota \mid \iota < \lambda)$ strikt wachsend (d.h. $\iota_1 < \iota_2 \to \kappa_{\iota_1} < \kappa_{\iota_2}$) und $\lambda \in Lim$, so ist $\kappa > \kappa_\iota$ für alle $\iota < \lambda$.*

Beweis. Angenommen, $\kappa \notin \text{Card}$. Dann existiert nach 0.3 ein $\alpha < \kappa$ und ein surjektives $f : \alpha \to \kappa$. Da $\alpha \in \kappa = \bigcup_{\iota<\lambda} \kappa_\iota$, existiert ein $\iota_0 \in \lambda$ mit $\alpha \in \kappa_{\iota_0}$. Definiere $\bar{f} : \alpha \to \kappa_{\iota_0}$ durch

$$\bar{f}(\gamma) := \begin{cases} f(\gamma), & \text{falls } f(\gamma) \in \kappa_{\iota_0} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\bar{f}$ surjektiv, aber $\alpha < \kappa_{\iota_0}$, also $\kappa_{\iota_0} \notin \text{Card}$, Widerspruch. $\square$

Damit können wir definieren: $\omega_0 := \omega,\ \omega_{\iota+1} := \omega_\iota^+,\ \lambda \in \text{Lim} \Rightarrow \omega_\lambda := \bigcup_{\iota<\lambda} \omega_\iota$.
$(\omega_\iota \mid \iota \in \text{On})$ ist eine echte Klasse von Kardinalzahlen. Es ist $\text{Card} = \omega \cup \{\omega_\iota \mid \iota \in \text{On}\}$ (ÜA).

0.9 Definition. Eine Menge X heißt abzählbar, falls $X \equiv \omega$, höchstens abzählbar, falls $|X| \leq \omega$, und überabzählbar, falls $|X| > \omega$.

0.10 Bemerkung. Will man den kardinalen Charakter von ω_ι betonen, schreibt man für ω_ι auch $\aleph_\iota$. Es gilt aber strikt: $\aleph_\iota = \omega_\iota$ für alle $\iota \in \text{On}$.

0.11 Korollar. *Die Funktion $\iota \mapsto \aleph_\iota$ ist normal. Insbesondere besitzt sie beliebig große Fixpunkte, d.h. $\alpha \in \text{On}$ mit $\alpha = \aleph_\alpha$.*

0.1 Kardinalzahlarithmetik

0.12 Definition. Sei $(\kappa_\iota \mid \iota < \alpha)$ eine Folge von Kardinalzahlen. Dann definieren wir die kardinale Summe $\sum_{\iota<\alpha} \kappa_\iota$ durch:

$$\sum_{\iota<\alpha} \kappa_\iota := \left| \bigcup_{\iota<\alpha} \kappa_\iota \times \{\iota\} \right|.$$

0.13 Lemma. *Seien $\kappa, \lambda, \nu \in Card$. Dann ist:*

(i) $\kappa + (\lambda + \nu) = (\kappa + \lambda) + \nu$

(ii) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$

Die kardinale Addition ist also - im Gegensatz zur ordinalen Addition - kommutativ.

0.14 Lemma. *Sei $(\kappa_\iota \mid \iota < \alpha)$ eine Folge von Kardinalzahlen, ferner $f : \alpha \to \beta$ bijektiv. Dann ist $\sum_{\iota<\alpha} \kappa_\iota = \sum_{\iota<\beta} \kappa_{f^{-1}(\iota)}$.*

0.15 Definition. Sei $(\kappa_\iota \mid \iota < \alpha)$ eine Folge von Kardinalzahlen. Die Menge

$$\prod_{\iota<\alpha} \kappa_\iota := \{f : \alpha \to \bigcup_{\iota<\alpha} \kappa_\iota \mid f(\iota) \in \kappa_\iota \text{ für alle } \iota < \alpha\}$$

heißt kartesisches Produkt von $(\kappa_\iota \mid \iota < \alpha)$. Das kardinale Produkt über $(\kappa_\iota \mid \iota < \alpha)$ ist dann gegeben durch

$$\prod_{\iota<\alpha}^{\#} \kappa_\iota := \left|\prod_{\iota<\alpha} \kappa_\iota\right|.$$

Für zwei Kardinalzahlen schreibt man im Allgemeinen auch $\kappa \cdot \lambda$, dann ist $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$.

0.16 Bemerkung. Sind $(A_\iota \mid \iota < \alpha)$ eine beliebige Folge von Mengen, so ist

$$\left|\prod_{\iota<\alpha} A_\iota\right| = \prod_{\iota<\alpha}^{\#} |A_\iota|.$$

Sind die A_ι paarweise disjunkt, so gilt

$$\left|\bigcup_{\iota<\alpha} A_\iota\right| = \sum_{\iota<\alpha} |A_\iota|.$$

0.17 Lemma. *Die obigen beiden Lemmata gelten analog für $\cdot$ statt $+$.*

0.18 Definition. Sind $\kappa, \lambda \in \text{Card}$, so ist die kardinale Exponentiation oder λ-te kardinale Potenz von κ gegeben durch $\kappa^\lambda := \prod_{\iota<\lambda}^{\#} \kappa$.

0.19 Bemerkung. Nach Definition von $\prod^{\#}$ ist also $\kappa^\lambda := |\{f_\lambda \to \kappa \mid f\text{Funktion}\}|$. Für die Menge der Funktionen von einer Menge A in eine Menge B schreibt man auch ${}^{A}B$. Es ist dann $\kappa^\lambda = |{}^{\lambda}\kappa|$.

0.20 Lemma. *Seien $\kappa, \lambda, \nu \in \text{Card}$. Dann ist:*

(i) $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\nu = \kappa^{\lambda+\nu}$

(ii) $\kappa^\lambda \cdot \nu^\lambda = (\kappa \cdot \nu)^\lambda$

(iii) $(\kappa^\nu)^\lambda = \kappa^{\nu \cdot \lambda}$