Erinnerung: Wir haben bisher die folgenden Axiome kennen gelernt: Extensionalität, Existenz einer leeren Menge, Potenzmengenaxiom, Aussonderungsaxiom, Vereinigungsaxiom, Ersetzungsaxiom, Unendlichkeitsaxiom

Hoffnung: Diese Axiome reichen aus, um zu zeigen:

(a) Zu jeder Ordinalzahl ι existiert die Stufe V_ι

(b) Es existiert eine unendliche Ordinalzahl.

Wir wollen jetzt als Axiom fordern:

$$V \subseteq \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota,$$

also: „Jede Menge liegt in einer V-Stufe".
Das drückt man aus durch das Fundiertheitsaxiom [Fund]: „$\in$ ist wohlfundiert" (d.h. jede Menge x enthält ein $\in$-minimales Element).
Wir wollen diese Formulierung motivieren.

0.1 Definition. Sei $x \in \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota$. Dann bezeichnet $\mathrm{rk}(x)$, genannt „Rang von x" das kleinste ι mit $x \in V_{\iota+1}$.

0.2 Lemma. *Sei* $\alpha \in \mathrm{On}$.

(a) $\alpha \subseteq V_\alpha$ *und damit* $\alpha \in V_{\alpha+1}$

(b) $\{\alpha, V_\alpha\} \in V_{\alpha+2}$ *und* $(\alpha, V_\alpha) = \{\{\alpha\}, \{\alpha, V_\alpha\}\} \in V_{\alpha+3}$

(c) $\{(\iota, V_\iota) \mid \iota \leq \alpha\} \subseteq V_{\alpha+3}$*, also* $\{(\iota, V_\iota) \mid \iota \leq \alpha\} \in V_{\alpha+4}$

Beweis. (a) klar: $\alpha \subseteq V_\alpha \Rightarrow \alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$. Nun: $\forall \alpha (\alpha \subseteq V_\alpha)$ durch transfinite Induktion:

- $\alpha = 0$: $\emptyset \subseteq \emptyset = V_0$
- α Nachfolger: Sei $\alpha = \beta + 1$. Nach Induktionsannahme ist $\beta \subseteq V_\beta$, also $\beta \in V_{\beta+1}$. Es folgt $\beta \subseteq V_\beta \subseteq V_{\beta+1}$ und damit $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\} \subseteq V_{\beta+1} = V_\alpha$.
- α Limesordinalzahl: Sei $\gamma \in \alpha$. Nach Induktionsannahme ist dann $\gamma \subseteq V_\gamma$, also $\gamma \in V_{\gamma+1} \subseteq V_\alpha$, d.h. $\gamma \in V_\alpha$. Also $\alpha \subseteq V_\alpha$.

(b) Bekannt: $V_\alpha \in V_{\alpha+1}$ und $\alpha \in V_{\alpha+1}$. Also $\{\alpha, V_\alpha\} \subseteq V_{\alpha+1}$, d.h. $\{\alpha, V_\alpha\} \in V_{\alpha+2}$.

Ferner: $\alpha \in V_{\alpha+1}$, also $\{\alpha\} \subseteq V_{\alpha+1}$, d.h. $\{\alpha\} \in V_{\alpha+2}$, und damit $\{\{\alpha\}, \{\alpha, V_\alpha\}\} \subseteq V_{\alpha+2}$.

Also $(\alpha, V_\alpha) = \{\{\alpha\}, \{\alpha, V_\alpha\}\} \subseteq V_{\alpha+2}$ und $(\alpha, V_\alpha) \in V_{\alpha+3}$.

(c) Für $\iota \leq \alpha$ ist $(\iota, V_\iota) \in V_{\iota+3} \subseteq V_{\alpha+3}$. (ÜA: $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + 1 \leq \beta + 1$)

Also $\{(\iota, V_\iota) \mid \iota \leq \alpha\} \subseteq V_{\alpha+3}$, also $\{(\iota, V_\iota) \mid \iota \leq \alpha\} \in V_{\alpha+4}$. $\square$

Insbesondere: Ist $\alpha \in \mathrm{On}$, so enthält $V_{\alpha+4}$ die Funktion $F_\alpha : \alpha + 1 \to V$ mit $F_\alpha(\iota) = V_\iota$ für alle $\iota \leq \alpha$.
Somit können wir $\mathrm{rk}(x)$ durch eine funktionale LAST-Formel definieren:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rk}(x) = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{On} \wedge \exists F(&\mathrm{Fkt}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = \alpha + 2\\
&\wedge F(0) = \emptyset \wedge \forall \iota < \alpha + 1\ F(\iota + 1) = \mathcal{P}(F(\iota))\\
&\wedge \forall \lambda < \alpha + 1(\lim(\lambda) \to F(\lambda) = \bigcup F[\lambda])\\
&\wedge x \in F(\alpha + 1) \wedge x \notin F(\alpha))\\
&\text{(oder: es existiert kein F, auf das die ersten 3 Zeilen der Formel zutreffen und } F(\alpha) = \emptyset)
\end{aligned}
$$

0.3 Lemma. *Ist $x \subseteq \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota$, so $x \in \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst: Ist $x \subseteq \mathrm{On}$, so ist $\bigcup x \in \mathrm{On}$.

Da x Menge, ist auch $\bigcup x$ Menge nach [Ver]. Da $\bigcup x \subseteq \mathrm{On}$, ist $(\bigcup x, \subseteq)$ Wohlordnung. Sei nun $\alpha \in \bigcup x$. Zu zeigen: $(\bigcup x)_\alpha = \alpha$.

„$\subseteq$“ Sei $\beta \in (\bigcup x)_\alpha$. Dann $\beta < \alpha$, also $\beta \in \alpha$.

„$\supseteq$“ Sei $\beta \in \alpha$. Da $\alpha \in \bigcup x$ ist, gibt es $\gamma \in x$ mit $\alpha \in \gamma$. Dann ist $\beta \in \alpha \in \gamma$, also $\beta \in \gamma \subseteq \bigcup x$, also $\beta \in (\bigcup x)_\alpha$.

Sei nun $x \subseteq \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota$. Dann existiert zu jedem $y \in x$ ein $\iota \in \mathrm{On}$ mit $y \in V_{\iota+1}$. Mit [Ers] und der Definition des Ranges durch eine funktionale LAST-Formel ist also $\widetilde{x} = \{\mathrm{rk}(y) \mid y \in x\}$ eine Menge mit $\widetilde{x} \subseteq \mathrm{On}$.

Nach (1) und [Ver] ist $\alpha := \bigcup \widetilde{x} \in \mathrm{On}$. Offenbar ist $\alpha \geq \gamma$ für alle $\gamma \in \widetilde{x}$. Also ist $\mathrm{rk}(y) \leq \alpha$ für alle $y \in x$, d.h. $x \subseteq V_{\alpha+1}$. Es folgt $x \in V_{\alpha+2} \subseteq \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota$. □

Erinnerung (Blatt 3, Aufgabe 4): $x \in y \Rightarrow \mathrm{rk}(x) < \mathrm{rk}(y)$ $(*)$

0.4 Theorem. *$\in$ ist genau dann wohlfundiert, wenn $V \subseteq \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota$.*

Beweis. „$\Leftarrow$“ Sei x eine Menge, wir wollen zeigen: x enthält ein $\in$-minimales Element. Betrachte dazu wie oben $\{\mathrm{rk}(y) \mid y \in x\} \subseteq \mathrm{On}$. Als Menge von Ordinalzahlen enthält $\{\mathrm{rk}(y) \mid y \in x\} \subseteq \mathrm{On}$ ein minimales Element α. Sei etwa $z \in x$ so, dass $\mathrm{rk}(z) = \alpha$. Dann ist $z \in x$ $\in$-minimal: Denn wäre $a \in x$ so, dass $a \in z$, so wäre nach $(*)$ $\mathrm{rk}(a) < \alpha$, im Widerspruch zur Minimalität von α.
„$\Rightarrow$“ Angenommen, es existiert $x \in V \setminus \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota$. Sei (nach Annahme) OBdA x $\in$-minimal mit dieser Eigenschaft. Dann ist $y \in \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota$ für alle $y \in x$. Also $x \subseteq \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota$. Nach 0.3 also $x \in \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota$, Widerspruch. □

Damit können wir „$V \subseteq \bigcup_{\iota \in \mathrm{On}} V_\iota$“ ausdrücken durch „$\in$ ist wohlfundiert“. Das wollen wir noch als LAST-Formel schreiben.

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

Genannt Fundiertheitsaxiom bzw. axiom of foundation, abgekürzt [Fund].

Insgesamt: [Ext], [Ex], [Pot], [Aus], [Ver], [Ers], [Inf] und [Fund] bilden die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre ZF.

0.5 Bemerkung (1). Im Rahmen von ZF können wir $R := \{x \mid x \notin x\}$ als Menge nicht mehr bilden. Tatsächlich gilt wegen [Fund] $x \notin x$ für jede Menge x. Die Russellsche Antinomie ist jetzt ein Beweis dafür, dass keine Menge existiert, die alle Mengen enthält: $V(= R)$ ist keine Menge.

0.6 Bemerkung (2). Die ZF-Axiome sind nicht unabhängig, z.B. sind [Ex] und [Aus] aus den übrigen Axiomen ableitbar. (siehe Zusatzaufgabe zum 4. Übungsblatt).

0.1 Klassen

0.7 Definition. Sei $\phi(x)$ eine LAST-Formel. Dann heißt

$$\{y \in V \mid \phi(y)\}$$

„Klasse“.

Jede Menge entspricht einer Klasse: $x = \{y \in V \mid y \in x\}$. Aber nicht umgekehrt (z.B. V). Klassen dienen nur als Abkürzungen; jede Verwendung von Klassen muss sich auf die Verwendung von $LAST$-Formeln zurückführen lassen! Einige solcher Abkürzungen fassen wir in der folgenden Definition zusammen:

0.8 Definition. Seien $A := \{y \in V \mid \phi(y)\}$, $B := \{y \in V \mid \psi(y)\}$ Klassen.
„$x \in A$“ $:\Leftrightarrow \phi(x)$
„$A \subseteq B$“ $:\Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$
„$A \cup B$“ $:= \{y \mid \phi(y) \vee \psi(y)\}$
„$A \cap B$“ $:= \{y \mid \phi(y) \wedge \psi(y)$

KEINEN SINN ergeben dagegen z.B. $\{A\}, \{A, B\}, A \in B, \phi(A)$.

0.9 Definition. Eine Klasse $A = \{z|\phi(z)\}$, die keine Menge ist, (d.h. so, dass keine Menge x existiert mit $\forall y(y \in x \leftrightarrow \phi(y))$) heißt **echte** Klasse.