Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Merlin Carl
Johannes Fahrner

SS 2016
12.04.2016

Zettel 1

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:
a) Zeigen Sie: Sind x, y und z Mengen, so gelten: $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ und $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.
b) Zeigen Sie: Sind x und y Mengen derart, dass $a \notin x$ und $a \notin y$ für alle a, so ist $x = y$.
Gehen Sie in beiden Teilen auf die Definitionen zurück und benutzen Sie das Extensionalitätsaxiom.

Aufgabe 2: Für eine Menge x bezeichne $\mathfrak{P}(x)$ die Potenzmenge von x.
a) Bestimmen Sie $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset)))$.
b) Die Folge $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ sei definiert durch $x_0 = \emptyset$ und $x_{n+1} = \mathfrak{P}(x_n)$. Wie viele Elemente enthält x_n?

Aufgabe 3: Beantworten Sie folgende Fragen. Geben Sie ggf. einen Beweis oder ein konkretes Gegenbeispiel an.
a) Ist $(a, b) := \{\{\emptyset, a\}, \{\{\emptyset\}, b\}\}$ eine adäquate Formalisierung für geordnete Paare?
b) Ist $(a, b, c) := \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ eine adäquate Formalisierung für geordnete Tripel?

Aufgabe 4: Geben Sie zwei Formeln ϕ_1, ϕ_2 in der Sprache der Mengenlehre an (d.h. bestehend aus $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, (,), $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\in$ und Variablennamen $x_1, x_2, ...$) derart, dass für ein geordnetes Paar x gilt: $\phi_1(x, y)$ gdw. y das erste Element von x und $\phi_2(x, y)$ gdw. y ist das zweite Element von x. Beweisen Sie, dass diese Formeln tatsächlich das Gewünschte leisten.
Hinweis: Führen Sie, wo es Ihnen sinnvoll erscheint, geeignete Abkürzungen ein.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Eine t.o.-Menge $(x, \leq)$ habe die Anfangsstückeigenschaft, falls zu jedem $y \subsetneq x$ mit
$\forall a, b \in x(b \in y \wedge a \leq b \rightarrow a \in y)$ ein $z \in x$ existiert mit
$\forall a \in y(a < z)$ und $\forall a \in x(a < z \rightarrow a \in y)$. Zeigen Sie: Genau dann hat $(x, \leq)$ die Anfangsstückeigenschaft, wenn $(x, \leq)$ wohlfundiert ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 19.04.2016, 11.45 in Briefkasten 1.