Fachbereich Mathematik und Statistik | SS 2016
der Universität Konstanz | 21.06.2016
Merlin Carl
Johannes Fahrner | Zettel 10

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1: Es seien κ, λ, μ Kardinalzahlen. Zeigen Sie:

(a) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$
(b) $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$
(c) $\kappa^\lambda \cdot \mu^\lambda = (\kappa \cdot \mu)^\lambda$
(d) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)}$

Aufgabe 2: Ziel dieser Aufgabe ist es, ohne Verwendung des Auswahlaxioms die Existenz einer überabzählbaren Kardinalzahl zu beweisen. Wir machen dazu die Widerspruchrsannahme, dass jede unendliche Ordinalzahl α abzählbar ist. Die folgenden Aufgaben sind also unter dieser Annahme (und ohne das Auswahlaxiom!) zu bearbeiten

Eine abzählbare Ordinalzahl α wird durch eine Teilmenge $x \subseteq \omega$ 'codiert', falls eine Bijektion $f : \omega \to \alpha$ so existiert, dass $x = \{p(i, j) : i, j \in \omega \wedge f(i) \in f(j)\}$ (hierbei bezeichnet $p : \omega \times \omega \to \omega$ die Cantorsche Paarfunktion, also die aus der Vorlesung bekannte Bijektion zwischen $\omega \times \omega$ und ω).

(a) Zeigen Sie: Jede unendliche Ordinalzahl wird durch ein $c \subseteq \omega$ codiert.

(b) Zeigen Sie: Zu jedem $c \subseteq \omega$ existiert höchstens eine Ordinalzahl α, die durch c codiert wird.

(b) Zeigen Sie: Die 'Decodierungsabbildung' $d : \mathfrak{P}(\omega) \to \mathrm{On}$

$$d(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } x \text{ die Ordinalzahl } \alpha \text{ codiert} \\ 0, & \text{falls } x \text{ keine Ordinalzahl codiert} \end{cases}$$

ist in LAST definierbar.

(c) Benutzen Sie nun das Ersetzungsaxiom, um zu zeigen, dass die Ordinalzahlen eine Menge bilden.

(d) Folgern Sie, dass die Annahme, alle Ordinalzahlen seien abzählbar, falsch ist.

Aufgabe 3: Die ordinale Exponentiation zur Basis ω ist rekursiv definiert durch: $\omega^0 = 1$, $\omega^{\alpha+1} = \omega \cdot \omega^\alpha$ und $\omega^\lambda = \bigcup_{\iota<\lambda} \omega^\iota$ für eine Limesordinalzahl λ. Nun sei $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{i+1} = \omega^{\alpha_i}$, $\alpha_\omega = \bigcup_{i<\omega} \omega^i$. Zeigen Sie:
a) Für jedes $0 < i \in \omega$ ist α_i abzählbar.
b) α_ω ist abzählbar.

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie: Ist X überabzählbar, Y abzählbar und $f : X \to Y$ eine Funktion, so existiert eine überabzählbare Menge $X' \subseteq X$ so, dass $f[X']$ genau ein Element enthält.

(b) Zeigen Sie: Für $k \in \omega$ ist $\mathbb{Q}^k$ abzählbar. Ferner ist $\bigcup_{k\in\omega} \mathbb{Q}^k$ abzählbar.

Eine reelle Zahl r heißt 'algebraisch', falls ein vom Nullpolynom verschiedenes $p \in \mathbb{Q}[X]$ mit $p(r) = 0$ existiert; andernfalls heißt r 'transzendent'.

(c) Zeigen Sie: Es gibt nur abzählbar viele algebraische Zahlen. Folgern Sie, dass es überabzählbar viele transzendente Zahlen gibt.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ die Menge der Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wir definieren folgende Ordnung auf ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$:

$$f_1 < f_2 \text{ gdw. } |\{k \in \mathbb{N} | f_1(k) \geq f_2(k)\}| < \omega \text{ für } f_1, f_2 \in^{\mathbb{N}} \mathbb{N}.$$

Ist $f_1 < f_2$, so sagen wir auch, f_2 sei 'fast überall größer' als f_1.
Zeigen Sie: Es existiert eine Folge $(f_\iota)_{\iota<\omega_1}$ von Elementen von ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, die in $<$ streng monoton wächst.
(Tipp: Definieren Sie die Folge durch Rekursion über ι und nutzen Sie die Abzählbarkeit der Indizes, um die bereits erzeugten Anfangsabschnitte im Ordnungstyp ω anzuordnen.)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 05.07.2016 bis 11.45 in Briefkasten 1.
BEACHTEN SIE, DASS DIE VORLESUNG AM 28.06.2016 AUSFÄLLT UND IN DER DARAUFFOLGENDEN WOCHE IN DER ÜBUNG NACHGEHOLT WIRD!