Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Merlin Carl
Johannes Fahrner

SS 2016
05.07.2016

Zettel 11

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:
Zeigen Sie: $\mathrm{Card} = \omega \cup \{\aleph_\iota | \iota \in \mathrm{On}\}$, d.h. zu jeder unendlichen Kardinalzahl κ existiert ein $\iota \in On$ mit $\kappa = \aleph_\iota$.

Aufgabe 2:
Es sei λ eine unendliche Kardinalzahl, $\mathrm{cf}(\lambda) = \theta$. Zeigen Sie: Es existiert eine normale (also stetige und ordnungserhaltende) Funktion $f : \theta \to \lambda$ derart, dass $f[\theta]$ kofinal in λ ist.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: $2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0}$.

Aufgabe 4:
Es sei $\mathfrak{F}$ die Menge der Funktionen f mit $\mathrm{dom}(f) \subset \aleph_1 \times \aleph_0$, $|\mathrm{dom}(f)| < \omega$ und $\mathrm{rng}(f) = \{0, 1\}$. Zwei Funktionen f_1 und f_2 heißen kompatibel, falls $f_1 \cup f_2 \in \mathfrak{F}$.
Zeigen Sie: Ist W eine überabzählbare Teilmenge von $\mathfrak{F}$, so enthält W zwei (voneinander verschiedene) kompatible Elemente.

Zusatzaufgabe für Interessierte:
Angenommen, es gelte die Kontinuumshypothese CH, inbesondere sei also $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Sei $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ das reelle Einheitsquadrat, ferner $\leq^*$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $\aleph_1$ auf Q und $M := \{(x, y) \in Q | x <^* y\}$.
(a) Zeigen Sie: Dann ist für jedes $a \in [0, 1]$ die a-te 'Zeile'
$Z_a := \{(x, a) | x \in [0, 1] \wedge x <^* a\}$ von M abzählbar und für die a-te 'Spalte'
$S_a := \{(a, y) | y \in [0, 1] \wedge a <^* y\}$ ist $[0, 1] - S_a$ abzählbar.

Aus der Analysis kennen Sie die folgende Konsequenz des Satzes von Fubini: Ist $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ meßbar und $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x, y) d(x, y) < \infty$, so ist

$$\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) dy) dx = \int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) dx) dy = \int_{[0,1]\times[0,1]} f(x, y) d(x, y).$$

Als SF ('starker Fubini') bezeichnet man nun die folgende, naheliegende Verschärfung: Ist $g : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ so, dass die beiden Integrale $\int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dy)dx$ und $\int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dx)dy$ definiert und endlich sind, so ist $\int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dy)dx = \int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dx)dy$.

(b) Folgern Sie aus (a): Ist CH richtig, so ist SF falsch.[1]

Bemerkung: In Verbindung mit der Unbeweisbarkeit von $\neg CH$ in ZFC folgt damit, dass SF in ZFC nicht beweisbar ist. Mit der Cohenschen Forcing-Methode läßt sich auch zeigen, dass $\neg SF$ in ZFC ebenfalls nicht beweisbar ist. Die starke Version des Satzes von Fubini ist also in ZFC nicht entscheidbar.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 12.07.2016 bis 11.45 in Briefkasten 1.

[1]Tipp: Betrachten Sie die charakteristische Funktion der Menge M.