Fachbereich Mathematik und Statistik der Universität Konstanz
Merlin Carl
Johannes Fahrner

SS 2016
19.04.2016

Zettel 2

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:
a) Sei x eine Menge. Wie viele zusammenhängende Äquivalenzrelationen gibt es auf x?
b) Seien x und y Ordinalzahlen. Zeigen Sie: Es ist $x \cap y = \min\{x, y\}$ und $x \cup y = \max\{x, y\}$.

Aufgabe 2: Sei $(X, \leq)$ eine Wohlordnung, $Y \subseteq X$ und $W := \{X_a | a \in X\}$.
a) Zeigen Sie: $(X, \leq) \cong (W, \subseteq)$.
b) Zeigen Sie: Ist $(X, \leq) \cong (Y, \leq)$, so ist Y unbeschränkt in $(X, \leq)$, d.h. zu jedem $x \in X$ existiert $y \in Y$ mit $y \geq x$.

Aufgabe 3: Eine Menge x heißt transitiv, falls für jedes $y \in x$ gilt, dass $y \subset x$, falls also jedes Element von x eine Teilmenge von x ist.
a) Zeigen Sie: Eine Menge x ist transitiv genau dann, wenn $\mathfrak{P}(x)$ transitiv ist.
b) Zeigen Sie: Ist x eine transitive Teilmenge einer Ordinalzahl y, so ist x selbst eine Ordinalzahl.

Aufgabe 4: (Induktion impliziert Wohlfundiertheit) Sei $(P, \leq)$ eine lineare Ordnung, so dass für alle $\in$-Formeln $\phi(x, x_1, ..., x_n)$ gilt:

$$\forall x_1, ..., \forall x_n (\forall x \in P(\forall y \in P(y < x \to \phi(y, x_1, ..., x_n)) \to \phi(x, x_1, ..., x_n)) \to \forall x \in P \phi(x, x_1, ..., x_n)).$$

Folgern Sie, dass dann $(P, \leq)$ sogar eine Wohlordnung ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Geben Sie (mit Beweis) eine $\in$-Formel $\phi(n, x)$ an, so dass für $n \in \mathbb{N}$ $\phi(n, x)$ genau dann wahr ist, wenn x ein Tupel der Länge n ist. Verwenden Sie die bereits in der Vorlesung und den Übungen eingeführten Abkürzungen $\subset$, $\cup$, $\cap$, etc., wo es Ihnen sinnvoll erscheint.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis 26.04.2016, 11.45 in Briefkasten 1.