Fachbereich Mathematik und Statistik SS 2016
der Universität Konstanz 04.05.2016
Merlin Carl
Johannes Fahrner Zettel 3

# Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

**Aufgabe 1**:
Zeigen Sie: Ist $\alpha \in On$, so ist $V_\alpha = \bigcup_{\iota<\alpha} \mathfrak{P}(V_\iota)$.

**Aufgabe 2**: (Formalisierung) Geben Sie (mit Beweis) Formeln in der Sprache der Mengenlehre für die folgenden Aussagen an. Führen Sie geeignete Abkürzungen ein.
a) $(x, \leq)$ ist eine partielle Ordnung.
b) $x$ ist eine Nachfolgerordinalzahl.
c) $x$ ist ein Ring.

**Aufgabe 3**: Für $\alpha \in On$ und $i \in \omega$ definieren wir $\alpha + i$ rekursiv durch $\alpha + 0 = \alpha$ und $\alpha + (i + 1) = (\alpha + i) + 1$.
a) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in On$, so ist $\lambda$ entweder Limesordinalzahl oder es existieren eine Limesordinalzahl $\gamma$ und eine Ordinalzahl $i \in \omega$ derart, dass $\lambda = \gamma + i$.
b) Zeigen Sie: Ist $f := (\alpha_i)_{i\in\omega}$ eine unendliche Folge von Ordinalzahlen, so existiert eine unendliche, monoton wachsende Teilfolge $f' = (\alpha_{i_j})_{j\in\omega}$ von $f$.
(Eine Folge $(\beta_i)_{i<\gamma}$ von Ordinalzahlen heißt monoton wachsend, falls
$\forall i, j \in \gamma(i < j \to \beta_i \leq \beta_j)$.)

**Aufgabe 4**: Für eine Menge $x$ sei $rk(x)$ der Rang von $x$, d.h. die kleinste Ordinalzahl $\gamma$ derart, dass $x \in V_{\gamma+1}$. Zeigen Sie:
a) $\forall\alpha \in On \forall\beta \in On(\alpha < \beta \to V_\alpha \subset V_\beta)$.
b) $\{\beta|\beta \in V_\alpha \wedge \beta \in On\} = \alpha$.
c) $x \in y$ impliziert $rk(x) < rk(y)$.
d) Gilt für Mengen $x, y$ stets $x \subset y \to rk(x) < rk(y)$?
Was ist mit $x \subseteq y \to rk(x) \leq rk(y)$?

**Zusatzaufgabe für Interessierte**: Es sei $(\phi_i|i \in \omega)$ eine effektive Aufzählung der $LAST$-Formeln in einer freien Variablen. Zeigen Sie: Es existiert keine Wahrheitsdefinition in $LAST$, d.h. es existiert keine $LAST$-Formel $\psi(n, x)$ derart, dass für alle $n \in \omega$ und alle Mengen $x$ die Formel $\psi(n, x)$ genau dann gilt, wenn $\phi_n(x)$ gilt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 10.05.2016 bis 11.45 in Briefkasten 1.