Fachbereich Mathematik und Statistik SS 2016
der Universität Konstanz 31.05.2016
Merlin Carl
Johannes Fahrner Zettel 7

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:

(a) Es sei AC$''$ folgendes Prinzip: 'Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Menge R so, dass $R \cap X$ für jedes $x \in \mathcal{F}$ genau ein Element enthält'. Zeigen, Sie, dass AC$''$ falsch ist.

Für $n \in \omega$ sei AC_n das folgende Prinzip: 'Ist $\mathcal{F}$ eine Familie paarweise disjunkter, nichtleerer Mengen, von denen jede genau n Elemente hat, so existiert ein Repräsentantensystem für $\mathcal{F}$'.

(b) Zeigen Sie in ZF, dass AC_n aus AC_m folgt, falls n ein Teiler von m ist.

(c) Zeigen Sie in ZF, dass AC_4 aus AC_2 folgt.[1]

Bemerkung: Der Zusammenhang zwischen den AC_k ist nicht trivial. Mit Methoden der Mengenlehre 2 läßt sich z.B. zeigen, dass in ZF AC_3 nicht aus AC_2 folgt.

Aufgabe 2: Es sei α eine Ordinalzahl, K ein Körper und $V = \{v_\iota : \iota < \alpha\}$ ein K-Vektorraum. Ein Vektor v_β mit $\beta < \alpha$ heißt 'überflüssig', falls $v_\beta \in \mathrm{span}\{v_\iota : \iota < \beta\}$. Es sei U die Menge der überflüssigen Vektoren.

(a) Zeigen Sie: $V \setminus U$ ist eine Basis von V.

(b) Zeigen Sie (in ZFC): Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Aufgabe 3: a) Geben Sie zu je zweien der folgenden Summen von Ordinalzahlen an, ob sie gleich sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

$1+\omega+\omega^2$, $1+\omega^2+\omega$, $\omega+1+\omega^2$, $\omega+\omega^2+1$, $\omega^2+1+\omega$, $\omega^2+\omega+1$. (5 Punkte)

b) Beweisen Sie: Jede Ordinalzahl β ist auf genau eine Weise in der Form $\beta = \omega^2 \cdot \alpha + \omega \cdot m + n$ darstellbar, wobei $\alpha \in On$ und $m, n \in \omega$. (5 Punkte)

[1] **Tipp**: Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von 4-elementigen Mengen, g eine Auswahlfunktion auf den Paaren von Elementen von $\bigcup \mathcal{F}$. Zu jedem $X \in \mathcal{F}$ betrachten wir die sechselementige Menge P_X aller Paare von Elementen von X. Zu jedem $x \in X$ sei $q(x)$ die Anzahl der Paare $\{x, y\} \in P_X$ mit $g(\{x, y\}) = x$. Es sei q das kleinste Element von $\{q(x) : x \in X\}$. Zeige, dass $q(x) \neq q$ für mindestens ein $x \in X$. Damit hat die Menge der $x \in X$ mit $q(x) = q$ also 1, 2 oder 3 Elemente. Definiere eine Auswahlfunktion für $\mathcal{F}$ durch eine Fallunterscheidung nach der Anzahl dieser Elemente.

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie: Zu jeder höchstens abzählbaren (siehe Zettel 5) Ordinalzahl α existiert eine streng monoton wachsende Funktion $f : \alpha \to \mathbb{R}$, d.h.: Jede höchstens abzählbare Ordinalzahl kann ordnungserhaltend in die reellen Zahlen eingebettet werden. (8 Punkte)

(b) Gilt diese Aussage auch noch, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q}$ ersetzt? (2 Punkte)

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien α und β Ordinalzahlen. Eine Ordinalzahl γ ist ein gemeinsames Linksvielfaches von α und β, falls Ordinalzahlen α', β' existieren mit $\alpha' \cdot \alpha = \gamma = \beta' \cdot \beta$. Entsprechend heißt γ gemeinsames Rechtsvielfaches von α und β, falls Ordinalzahlen α' und β' existieren mit $\alpha \cdot \alpha' = \gamma = \beta \cdot \beta'$.
Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Je zwei Ordinalzahlen haben ein gemeinsames Rechtsvielfaches. (5 Punkte)

b) Je zwei Ordinalzahlen haben ein gemeinsames Linksvielfaches. (5 Punkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 07.06.2016 bis 11.45 in Briefkasten 1.