Fachbereich Mathematik und Statistik SS 2016
der Universität Konstanz 07.06.2016
Merlin Carl
Johannes Fahrner Zettel 8

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:
a) Beweisen Sie: Sind α, β und γ Ordinalzahlen, so gilt $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
b) Gilt für Ordinalzahlen α, β und γ stets $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$?

Aufgabe 2:
(a) Für $\iota \in On$ sei δ_ι die ι-te Limesordinalzahl. Existiert ein $0 \neq \alpha \in On$ mit $\alpha = \delta_\alpha$? Beweisen Sie Ihre Antwort.
(b) Zeigen Sie: Sind α, β, γ Ordinalzahlen, so ist $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Aufgabe 3: Es sei $\alpha \in \mathrm{On}$.
(a) Zeigen Sie: α ist genau dann eine Limesordinalzahl, wenn ein $\beta \in \mathrm{On}$ existiert mit $\alpha = \omega\beta$.
(b) Beweisen oder widerlegen Sie: α ist genau dann eine Limesordinalzahl, wenn ein $\beta \in \mathrm{On}$ existiert mit $\alpha = \beta\omega$.

Aufgabe 4: Es seien α und β Ordinalzahlen.
(a) Zeigen Sie: Ist $\alpha \leq \beta$, so existiert eine Ordinalzahl γ mit $\alpha + \gamma = \beta$.
(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $\alpha < \beta$, so existiert eine Ordinalzahl γ mit $\gamma + \alpha = \beta$.
(c) Zeigen Sie: Ist $\alpha \leq \beta$, so exitieren $\gamma \in \mathrm{On}$ und $\rho \in \alpha$ so, dass $\beta = \alpha\gamma + \rho$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Wir definieren ordinale Exponentiation, indem wir für alle $\alpha, \eta, \lambda \in \mathrm{On}$ setzen: $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{\eta+1} = \alpha^\eta \alpha$ und $\alpha^\lambda = \bigcup_{\iota<\lambda} \alpha^\iota$, falls λ Limesordinalzahl.
(a) Zeigen Sie: Ist α eine Ordinalzahl, so ist α, so existieren $n \in \omega$, $\gamma_0 < \gamma_1 < .... < \gamma_n \in \mathrm{On}$ sowie $c_0, ..., c_n \in \omega$ so, dass $\alpha = c_n\omega^{\gamma_n} + c_{n-1}\omega^{\gamma_{n-1}} + ... + c_0\omega^{\gamma_0}$.
(b) Zeigen Sie weiter: Die Darstellung von α in der in (a) angegebenen Form ist eindeutig.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 14.06.2016 bis 11.45 in Briefkasten 1.