Fachbereich Mathematik und Statistik SS 2016
der Universität Konstanz 14.06.2016
Merlin Carl
Johannes Fahrner Zettel 9

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1: Ordnen Sie die folgenden Mengen nach aufsteigender bzw. gleicher Mächtigkeit. Beweisen Sie Ihre Antworten.

(1) Das abgeschlossene reelle Einheitsintervall $[0, 1]$
(2) Das offene reelle Intervall $]2, 5[$
(3) ω
(4) $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die Menge der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$
(5) Die Menge der irrationalen Zahlen
(6) $\omega^{<\omega}$, die Menge der endlichen Folgen natürlicher Zahlen
(7) $\mathbb{C}$

Aufgabe 2:

a) Es sei $(A_i|i \in \omega)$ eine Folge von Mengen mit mit folgenden Eigeschaften:

- $\forall i \in \omega A_i \subset \omega$
- $\forall i < j \in \omega A_i \supset A_j$
- $\forall i \in \omega |A_i| = \omega$

Welche Werte kann $|\bigcap_{i \in \omega} A_i|$ annehmen? (5 Punkte)
b) Zeigen Sie: Es existieren beliebig große $\alpha \in On$ derart, dass $\alpha = \aleph_{\aleph_\alpha}$.
(5 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Sei V ein K-Vektorraum mit Basis B. Bestimmen Sie $|V|$ in Abhängigkeit von $|K|$ und $|B|$. Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für das Ergebnis. Führen Sie ggf. eine geeignete Fallunterscheidung durch.
b) Sei K ein Körper, $\bar{K}$ sein algebraischer Abschluss. Bestimmen Sie $|\bar{K}|$ in Abhängigkeit von $|K|$. Vereinfachen Sie das Ergebnis auch hier so weit wie möglich.

Aufgabe 4:

(a) Bestimmen Sie (mit Beweis) $\Sigma_{i=0}^{\omega \cdot 2} i$

(b) Die ordinale Fibonaccifolge $(F_\iota : \iota \in \mathrm{On})$ ist gegeben durch: $F_0 = F_1 = 1$, $F_{\alpha+2} = F_\alpha + F_{\alpha+1}$ und $F_{\lambda+1} = F_\lambda = \lim_{\iota<\lambda} F_\iota$, falls λ Limesordinalzahl ist. Bestimmen Sie (mit Beweis) $F_{\omega+3}$ und $F_{\omega \cdot 2+1}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Die Elemente von $\mathfrak{P}(\omega)$ sind sehr gesellig und möchten eine große Party veranstalten, bei der überabzählbar viele von ihnen zusammenkommen sollen. Allerdings mögen sie es überhaupt nicht, wenn sie zu eng beieinander stehen müssen, und wenn zwei verschiedene Partygäste eine unendliche Schnittmenge haben, geraten sie in Streit. Zeigen Sie, dass eine Gästeliste für eine überabzählbare Party existiert, bei der keine zwei Gäste in Streit geraten.
(Anders gesagt: Finden Sie eine überabzählbare Familie $\mathfrak{F}$ von Teilmengen von ω derart, dass $|x \cap y|$ für alle $x \neq y \in \mathfrak{F}$ endlich ist.)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 21.06.2016 bis 11.45 in Briefkasten 1.