Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2012
04.07.2012
Zettel 10

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1: Es sei κ eine reguläre Kardinalzahl. Zeigen Sie: Es existiert eine singuläre Kardinalzahl λ mit $cf(\lambda) = \kappa$.

Aufgabe 2: Es sei λ eine unendliche Kardinalzahl, $cf(\lambda) = \theta$. Zeigen Sie: Es existiert eine normale (also stetige und ordnungserhaltende) Funktion $f : \theta \to \lambda$ derart, dass $f[\theta]$ kofinal in λ ist.

Aufgabe 3: Die ordinale Exponentiation zur Basis ω ist rekursiv definiert durch: $\omega^0 = 1$, $\omega^{\alpha+1} = \omega \cdot \omega^\alpha$ und $\omega^\lambda = \bigcup_{\iota<\lambda} \omega^\iota$ für eine Limesordinalzahl λ. Nun sei $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{i+1} = \omega^{\alpha_i}$, $\alpha_\omega = \bigcup_{i<\omega} \omega^i$. Zeigen Sie:
a) Für jedes $0 < i \in \omega$ ist α_i abzählbar.
b) α_ω ist abzählbar.

Aufgabe 4: Zu einer Ordinalzahl μ bezeichnet $[\mu]^\kappa$ die Menge aller Teilmengen von μ mit Kardinalität κ. $C \subseteq [\mu]^\kappa$ heiße kofinal, falls zu jedem $x \in [\mu]^\kappa$ ein $y \in C$ existiert mit $x \subseteq y$.
Zeigen Sie: Ist $\kappa \leq \mu$ unendliche Kardinalzahl und C kofinal in $[\mu]^\kappa$, so ist $|[\mu]^\kappa| \leq |C| \cdot 2^\kappa$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Wir definieren die ordinale Exponentiation zur Basis ω wie in Aufabe 3.
(1) Zeigen Sie: Für $i < j < \omega$ ist $\omega^i + \omega^j = \omega^j$. (1 Punkt)
(2) Es sei Π_n die Menge der Permutationen auf der Menge $\{1, ..., n\}$. Es sei $a_n = |\{\Sigma_{i=1}^n \omega^{\pi(i)} | \pi \in \Pi_n\}|$. a_n ist also die Anzahl verschiedener ordinaler Summen, die man durch Umordnen der Summanden aus $\Sigma_{i=1}^n \omega^i$ erhält. Zeigen Sie:

$$a_{n+1} \leq \Sigma_{j=0}^n a_j \binom{n}{j}.$$

(7 Punkte)
(3) Bleibt die Aussage von (2) wahr, wenn man $\{1, 2, ..., n\}$ durch eine beliebige Menge von n paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen ersetzt?
(2 Punkte)

Zusatz: Folgern Sie: $a_n \leq \frac{1}{e} \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$. (5 Punkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 11.07.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.