Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2012
11.07.2012
Zettel 11

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1: Es sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Mit $[\kappa]^{<\omega}$ bezeichnen wir die Menge der endlichen Folgen von Elementen von κ. Zeigen Sie: $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: $\Pi^{\sharp}_{i\in\omega}\aleph_i > \aleph_\omega$.

Aufgabe 3: Beweisen Sie $\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$ für jede unendliche Kardinalzahl κ ohne Benutzung von Königs Lemma, indem Sie die Annahme einer Bijektion $f : \kappa \to \Pi_{\iota<cf(\kappa)}\kappa$ durch ein Diagonalargument ad absurdum führen.

Aufgabe 4: Es sei κ eine unendliche Kardinalzahl und $(\kappa_\iota|\iota < \theta)$ eine in κ kofinale Folge von Kardinalzahlen. Dann ist $\Pi^{\sharp}_{\iota<\theta}\kappa_\iota > \kappa$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Angenommen, es gelte die Kontinuumshypothese CH, inbesondere sei also $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Sei $Q := [0,1] \times [0,1]$ das reelle Einheitsquadrat, ferner $\leq^*$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $\aleph_1$ auf Q und $M := \{(x,y) \in Q | x <^* y\}$.
a) Zeigen Sie: Dann ist für jedes $a \in [0,1]$ die a-te 'Zeile'
$Z_a := \{(x,a) | x \in [0,1] \wedge x <^* a\}$ von M abzählbar und für die a-te 'Spalte' $S_a := \{(a,y) | y \in [0,1] \wedge a <^* y\}$ ist $[0,1] - S_a$ abzählbar.

Aus der Analysis kennen Sie die folgende Konsequenz des Satzes von Fubini: Ist $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ meßbar und $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y) d(x,y) < \infty$, so ist

$$\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx = \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy = \int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)d(x,y).$$

Als SF ('starker Fubini') bezeichnet man nun die folgende, nahe liegende Verschärfung: Ist $g : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ so, dass die beiden Integrale $\int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dy)dx$ und $\int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dx)dy$ definiert und endlich sind, so ist $\int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dy)dx = \int_0^1 (\int_0^1 g(x,y)dx)dy$.

b) Folgern Sie aus a): Ist CH richtig, so ist SF falsch. (Tipp: Betrachten Sie die charakteristische Funktion der Menge M.)

Bemerkung: In Verbindung mit der Unbeweisbarkeit von $\neg CH$ in ZFC folgt damit, dass SF in ZFC nicht beweisbar ist. Mit der Cohenschen Forcing-Methode läßt sich auch zeigen, dass $\neg SF$ in ZFC ebenfalls nicht beweisbar ist. Die starke Version des Satzes von Fubini ist also in ZFC nicht entscheidbar.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 18.07.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.