



Fachbereich Mathematik und Statistik  
der Universität Konstanz  
Dr. Merlin Carl

SS 2012  
02.05.2012  
Zettel 2

## Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

### Aufgabe 1:

- Sei  $x$  eine Menge. Wie viele zusammenhängende Äquivalenzrelationen gibt es auf  $x$ ?
- Seien  $x$  und  $y$  Ordinalzahlen. Dann ist  $x \cap y = \min\{x, y\}$  und  $x \cup y = \max\{x, y\}$ .

**Aufgabe 2:** Sei  $(X, \leq)$  eine Wohlordnung,  $Y \subseteq X$  und  $W := \{X_a \mid a \in X\}$ .

- Zeigen Sie:  $(X, \leq) \cong (W, \subseteq)$ .
- Zeigen Sie: Ist  $(X, \leq) \cong (Y, \leq)$ , so ist  $Y$  unbeschränkt in  $(X, \leq)$ , d.h. zu jedem  $x \in X$  existiert  $y \in Y$  mit  $y \geq x$ .

**Aufgabe 3:** Eine Menge  $x$  heißt transitiv, falls für jedes  $y \in x$  gilt, dass  $y \subset x$ , falls also jedes Element von  $x$  eine Teilmenge von  $x$  ist.

- Zeigen Sie: Eine Menge  $x$  ist transitiv genau dann, wenn  $\mathfrak{P}(x)$  transitiv ist.
- Zeigen Sie: Ist  $x$  eine Ordinalzahl, so ist  $x$  transitiv und enthält nur transitive Elemente.
- Zeigen Sie: Ist  $x$  eine Ordinalzahl und  $y \subset x$  transitiv, so ist auch  $y$  Ordinalzahl.

**Aufgabe 4:** (Induktion impliziert Wohlfundiertheit) Sei  $(P, <)$  eine lineare Ordnung, so dass für alle  $\in$ -Formeln  $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$  gilt:

$$\forall x_1, \dots, \forall x_n (\forall x \in P (\forall y \in P (y < x \rightarrow \phi(y, x_1, \dots, x_n)) \rightarrow \phi(x, x_1, \dots, x_n)) \rightarrow \forall x \in P \phi(x, x_1, \dots, x_n)).$$

Folgern Sie, dass dann  $(P, <)$  sogar eine Wohlordnung ist.

**Zusatzaufgabe für Interessierte:** Geben Sie (mit Beweis) eine Formel  $\phi(n, x)$  in der Sprache der Mengenlehre an, so dass für  $n \in \mathbb{N}$   $\phi(n, x)$  genau dann wahr ist, wenn  $x$  ein Tupel der Länge  $n$  ist. Verwenden Sie die bereits in der Vorlesung und den Übungen eingeführten Abkürzungen  $\subset, \cup, \cap$ , etc., wo es Ihnen sinnvoll erscheint.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.  
Abgabe am 09.05.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an [merlin.carl@uni-konstanz.de](mailto:merlin.carl@uni-konstanz.de).