Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2012
16.05.2012
Zettel 4

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:
a) Zeigen Sie: Es existiert keine Menge x mit $x \in x$. (2 Punkte)
b) Ist $\{\alpha | \alpha \text{ ist Limesordinalzahl}\}$ eine Menge? Beweisen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)
c) Welche der Axiome von ZF gelten in V_ω? Geben Sie zu jedem Axiom eine kurze Begründung Ihrer Antwort. (4 Punkte)
(Eine $LAST$-Formel ϕ 'gilt in V_ω', falls die Formel ϕ^{V_ω}, die aus ϕ dadurch entsteht, dass man jeden Quantor $\forall x$ bzw. $\exists x$ in ϕ durch den beschränkten Quantor $\forall x \in V_\omega$ bzw. $\exists x \in V_\omega$ ersetzt, wahr ist.)

Aufgabe 2:
a) Zeigen Sie mit den ZF-Axiomen, dass die Menge
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, ...\}$ existiert.
b) Zeigen Sie nun axiomatisch, dass die Ordinalzahl ω existiert. (Tipp: a) kann hilfreich sein.)

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Ist x eine transitive Menge und sind alle Elemente von x transitiv, so ist x eine Ordinalzahl.

Aufgabe 4:
Finden Sie alle Mengen X, Y mit $X \times Y = X$. Beweisen Sie Ihre Antwort.

Zusatzaufgabe für Interessierte:
a) Leiten Sie die Existenz einer leeren Menge aus den übrigen ZF-Axiomen her. (2 Punkte)
b) Leiten Sie das Aussonderungsaxiom aus den übrigen ZF-Axiomen her. (8 Punkte)
(Tipp: Sei $\phi(x)$ eine $LAST$-Formel und Z eine Menge. O.B.d.A. nehmen wir an, es existiere ein $a \in Z$ mit $\phi(a)$. Konstruieren Sie eine funktionale $LAST$-Formel $\psi(x, y)$ derart, dass $\psi(x, y)$ genau dann gilt, wenn $x \in Z$, $\phi(x)$ und $x = y$ oder $\neg(x \in Z \wedge \phi(x))$ und $y = a$. Verwenden Sie nun das Ersetzungsaxiom, um $\{z \in Z : \phi(z)\}$ zu erhalten.)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 23.05.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.