Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2012
23.05.2012
Zettel 5

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1: Verwenden Sie das Rekursionsprinzip in der Formulierung aus der Vorlesung, um zu zeigen:
a) Es existiert eine Funktion $f : \omega \to \omega$ derart, dass $f(i)$ die i-te Fibonaccizahl ist.
(Die Fibonaccizahlen sind definiert durch $F_0 = F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ für $n \in \omega$.)
b) Es existiert eine Funktion $f : \omega \to \omega$ derart, dass $f(i) = i!$, wobei $0! = 1$ und $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.
(In beiden Aufgaben dürfen Sie die Operationen $+$ und $\cdot$ für endliche Ordinalzahlen ohne weitere Erklärung verwenden.)

Aufgabe 2: ($\in$-Isomorphismen transitiver Mengen)
Sei C eine transitive Menge. Wieviele Bijektionen f von C auf sich selbst gibt es mit der Eigenschaft, dass

$$\forall x \in C \forall y \in C((x \in y) \leftrightarrow (f(x) \in f(y)))?$$

Aufgabe 3:
a) Es sei α eine Ordinalzahl. Zeigen Sie: α ist genau dann Limesordinalzahl, wenn $\alpha = \bigcup \alpha$. (3 Punkte)
b) Wir definieren rekursiv eine Klassenfunktion $f : V \to On$ durch $f(x) = sup(\{f(y) + 1 | y \in x\})$. Zeigen Sie (z.B. mit transfiniter Induktion): $f(x) = rk(x)$ für alle $x \in V$. (7 Punkte)

Aufgabe 4: Es sei $\omega + \omega = \bigcup \{\omega + i | i \in \omega\}$. (Zur Definition von $\omega + i$ siehe Zettel 3, Aufgabe 3.) Welche Axiome von ZF gelten in $V_{\omega+\omega}$? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (Rekursion impliziert Wohlfundiertheit.)
a) Sei $(X, \leq)$ eine linear geordnete Menge mit folgender Eigenschaft:
Zu jeder funktionalen $LAST$-Formel $\phi(x, y, z, \vec{p})$ und jeder endlichen Folge $\vec{p}$ von Mengen existiert eine eindeutige Funktion $f : X \to V$ derart, dass $\phi(x, f \restriction x, f(x), \vec{p})$ für alle $x \in X$ gilt.
Zeigen Sie: $(X, \leq)$ ist Wohlordnung. (4 Punkte)
b) Zeigen Sie: Die Folgerung bleibt richtig, wenn man in a) 'eine eindeutige' ersetzt durch 'höchstens eine', also lediglich Eindeutigkeit, nicht aber Existenz fordert. (3 Punkte)
c) Zeigen Sie nun, dass die Folgerung ebenfalls richtig bleibt, wenn man in a) nur die Existenz einer Funktion fordert, nicht aber deren Eindeutigkeit. (3 Punkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 30.05.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.