Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2012
30.05.2012
Zettel 6

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:
a) Der britische Mathematiker, Philosoph und Literaturnobelpreisträger Bertrand Russell sagte einmal: 'Um aus unendlich vielen Paaren Socken je ein Exemplar auszuwählen, benötigt man das Auswahlaxiom. Bei Schuhen ist es unnötig.' Erklären Sie diese Aussage. (2 Punkte)
b) Finden Sie 3 Beispiele für zentrale Sätze der klassischen Mathematik, in deren Beweis das Auswahlaxiom verwendet wird. (3 Punkte)
c) Es sei $(x, \leq)$ eine partielle Ordnung. Zeigen Sie mit einer geeigneten Formulierung des Auswahlaxioms: Es existiert eine Relation $\leq'$ auf x derart, dass $\leq \subseteq \leq'$ (d.h. $a \leq b$ impliziert $a \leq' b$ für $a, b \in x$) und $(x, \leq')$ lineare Ordnung ist. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Eine Menge x heißt höchstens abzählbar, falls eine surjektive Funktion $f : \omega \to x$ existiert. Es sei nun $\{A_i | i \in \omega\}$ eine höchstens abzählbare Familie von höchstens abzählbaren Mengen.
a) Zeigen Sie: $\bigcup_{i\in\omega} A_i$ ist höchstens abzählbar. (6 Punkte)
b) Benutzt Ihr Argument das Auswahlaxiom? Falls ja geben Sie an, in welchem Schritt. (4 Punkte)

Aufgabe 3: Eine Menge x heißt wohlordenbar, falls eine Relation $\leq$ auf x derart existiert, dass $(x, \leq)$ Wohlordnung ist. Seien nun x und y Mengen.
a) Zeigen Sie in ZF: '$x \cup y$ ist wohlordenbar' gdw. 'x und y sind wohlordenbar' gdw. '$x \times y$ ist wohlordenbar'. (3 Punkte)
b) Zeigen Sie in ZF: Ist $\mathfrak{P}(x)$ wohlordenbar, so auch x. (3 Punkte)
c) Zeigen Sie in ZF umgekehrt: Ist die Potenzmenge einer wohlordenbaren Menge stets wohlordenbar, so gilt der Wohlordnungssatz. (4 Punkte)
(Tipp: Verwenden Sie transfinite Induktion über den Rang oder wählen Sie ein $\in$-minimales Gegenbeispiel und arbeiten Sie auf einen Widerspruch hin.)

Aufgabe 4: Eine Menge x heißt 'erblich endlich', falls x endlich ist und alle Elemente von x erblich endlich sind.
a) Definieren Sie 'erblich endlich' durch eine $LAST$-Formel. (2 Punkte)
b) Zeigen Sie: $\{x|'x \text{ ist erblich endlich}'\} = V_\omega$. (8 Punkte)

Zusatzaufgabe für Interessierte: (Auswahl und Hobbits)
Der dunkle Herrscher Sauron hat ω viele Hobbits gefangen genommen und spielt mit ihnen folgendes Spiel: Die Hobbits werden in einer Reihe vom Ordnungstyp ω aufgestellt, mit Blick in Richtung ω. Dann wird jedem ein roter oder ein grüner Hut aufgesetzt. Jedem Hobbit ist bekannt, an welcher Position der Reihe er steht, und er sieht die Hutfarben aller Hobbits, die vor ihm stehen, seine eigene oder die der hinter ihm stehenden aber nicht. Am Anfang der Reihe beginnend fragt Sauron nun jeden Hobbit nach seiner Hutfarbe. Währenddessen kann kein Hobbit hören, was ein anderer sagt, noch auf eine andere Weise mit den anderen kommunizieren. Wer korrekt antwortet, wird freigelassen, wer sich irrt, kommt in die Suppe. Die Hobbits dürfen sich aber vor Spielbeginn auf eine Strategie einigen und dabei das Auswahlaxiom benutzen. Zeigen Sie, dass durch geeignete Wahl der Strategie alle bis auf endlich viele Hobbits gerettet werden können.
(Tipp: Betrachten Sie auf ${}^\omega\{0,1\}$ (also der Menge der Folgen der Form $(a_i)_{i\in\omega}$ mit $a_i \in \{0,1\}$ für alle $i \in \omega$) die Äquivalenzrelation

$$s \sim t \text{ gdw. } \{i \in \omega | s(i) \neq t(i)\} \text{ ist endlich.}$$

und benutzen Sie AC, um ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen zu finden.)

Ergänzung: Nehmen Sie nun an, dass die Hobbits doch hören können, was die hinter ihnen stehenden Hobbits Sauron antworten. Zeigen Sie, dass dann sogar alle bis auf höchstens einen Hobbit sicher gerettet werden können. (5 Zusatzpunkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 06.06.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.