Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2012
06.06.2012
Zettel 7

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1:
a) Geben Sie zu je zweien der folgenden Summen von Ordinalzahlen an, ob sie gleich sind. Begründen Sie Ihre Antwort.
$1+\omega+\omega^2$, $1+\omega^2+\omega$, $\omega+1+\omega^2$, $\omega+\omega^2+1$, $\omega^2+1+\omega$, $\omega^2+\omega+1$. (5 Punkte)
b) Beweisen Sie: Jede Ordinalzahl β ist auf genau eine Weise in der Form $\beta=\omega^2\cdot\alpha+\omega\cdot m+n$ darstellbar, wobei $\alpha\in On$ und $m,n\in\omega$. (5 Punkte)

Aufgabe 2:
a) Beweisen Sie: Sind α, β und γ Ordinalzahlen, so gilt $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$. (6 Punkte)
b) Gilt für Ordinalzahlen α, β und γ stets $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$? (4 Punkte)

Aufgabe 3:
Für $\iota\in On$ sei δ_ι die ι-te Limesordinalzahl. Existiert ein $0\neq\alpha\in On$ mit $\alpha=\delta_\alpha$? Beweisen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

Aufgabe 4:
(a) Zeigen Sie: Zu jeder höchstens abzählbaren (siehe Zettel 5) Ordinalzahl α existiert eine streng monoton wachsende Funktion $f:\alpha\to\mathbb{R}$, d.h.: Jede höchstens abzählbare Ordinalzahl kann ordnungserhaltend in die reellen Zahlen eingebettet werden. (8 Punkte)
(b) Gilt diese Aussage auch noch, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q}$ ersetzt? (2 Punkte)

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien α und β Ordinalzahlen. Eine Ordinalzahl γ ist ein gemeinsames Linksvielfaches von α und β, falls Ordinalzahlen α', β' existieren mit $\alpha'\cdot\alpha=\gamma=\beta'\cdot\beta$. Entsprechend heißt γ gemeinsames Rechtsvielfaches von α und β, falls Ordinalzahlen α' und β'

existieren mit $\alpha \cdot \alpha' = \gamma = \beta \cdot \beta'$.
Beweisen oder widerlegen Sie:
a) Je zwei Ordinalzahlen haben ein gemeinsames Rechtsvielfaches. (5 Punkte)
b) Je zwei Ordinalzahlen haben ein gemeinsames Linksvielfaches. (5 Punkte)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 13.06.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.