



Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2012
27.06.2012
Zettel 9

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Aufgabe 1: Zeigen Sie für beliebige Kardinalzahlen κ, λ, μ :

- (i) $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$.
- (ii) $\kappa^\lambda \cdot \mu^\lambda = (\kappa \cdot \mu)^\lambda$.
- (iii) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

Aufgabe 2:

a) Sei V ein K -Vektorraum mit Basis B . Bestimmen Sie $|V|$ in Abhängigkeit von $|K|$ und $|B|$. Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für das Ergebnis. Führen Sie ggf. eine geeignete Fallunterscheidung durch.

b) Sei K ein Körper, \bar{K} sein algebraischer Abschluss. Bestimmen Sie $|\bar{K}|$ in Abhängigkeit von $|K|$. Vereinfachen Sie das Ergebnis auch hier so weit wie möglich.

Aufgabe 3:

Es sei \mathfrak{F} die Menge der Funktionen f mit $\text{dom}(f) \subset \aleph_1 \times \aleph_0$, $|\text{dom}(f)| < \omega$ und $\text{rng}(f) = \{0, 1\}$. Zwei Funktionen f_1 und f_2 heißen kompatibel, falls $f_1 \cup f_2 \in \mathfrak{F}$.

Zeigen Sie: Ist W eine überabzählbare Teilmenge von \mathfrak{F} , so enthält W zwei (voneinander verschiedene) kompatible Elemente.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie: $2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ die Menge der Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Wir definieren folgende Ordnung auf ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$:

$$f_1 < f_2 \text{ gdw. } |\{k \in \mathbb{N} \mid f_1(k) \geq f_2(k)\}| < \omega \text{ f\u00fcr } f_1, f_2 \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}.$$

Ist $f_1 < f_2$, so sagen wir auch, f_2 sei 'fast \u00fcberall gr\u00f6\u00dfer' als f_1 .

Zeigen Sie: Es existiert eine Folge $(f_\iota)_{\iota < \omega_1}$ von Elementen von ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, die in $<$ streng monoton w\u00e4chst.

(Tipp: Definieren Sie die Folge durch Rekursion \u00fcber ι und nutzen Sie die Abz\u00e4hlbarkeit der Indizes, um die bereits erzeugten Anfangsabschnitte im Ordnungstyp ω anzuordnen.)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 04.07.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an
merlin.carl@uni-konstanz.de.