Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2012
13.06.2012
Zusatzzettel

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 1

Die Aufgaben dieses Zettels dienen der Wiederholung und Vertiefung. Die erreichten Punkte gehen als Zusatzpunkte in die Übungspunktzahl ein.

Aufgabe 1: Finden Sie alle transitiven Mengen x und y derart, dass $x - y$ transitiv ist.

Aufgabe 2: Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:
a) $trans(x)$ gdw. $\forall y \in x(trans(y))$.
b) $trans(x)$ gdw. $\in$ ist transitive Relation auf x.

Aufgabe 3:
Zwei Funktionen f und g mögen kompatibel heißen, falls $f(u) = g(u)$ für alle $u \in dom(f) \cap dom(g)$. Sei F eine Menge von Funktionen. Zeigen Sie: $\bigcup F$ ist Funktion genau dann, wenn die Elemente von F paarweise kompatibel sind.

Aufgabe 4:
Identifizieren Sie das reelle Einheitsintervall $[0,1]$ mit $\mathfrak{P}(\omega)$, in dem Sie jedes $x \in [0,1]$ in einer Dualdarstellung $x = \Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} c_i$ mit $c_i \in \{0,1\}$ betrachten und x mit $\{j \in \omega | c_i = 1\}$ identifizieren.
a) Ist diese Darstellung eindeutig? (2 Punkte)
b) Schreiben Sie $x < y$ für die so dargestellten reellen Zahlen im Einheitsintervall als $LAST$-Formel. (4 Punkte)
c) Geben Sie eine $LAST$-Formel für '$f : [0,1] \to [0,1]$ ist stetig. (6 Punkte)
d) Schreiben Sie die Behauptung 'Jedes stetige $f : [0,1] \to [0,1]$ hat einen Fixpunkt' als $LAST$-Formel. Skizzieren Sie, wie sich dieser Beweis in ZFC beweisen läßt. (8 Punkte)

Aufgabe 5:
Beweisen oder widerlegen Sie: Zwei Wohlordnungen, von denen jede zu einem Anfangsabschnitt der anderen isomorph sind, sind zueinander isomorph.

Aufgabe 6:
a) Beweisen Sie: Zu jeder Menge x existiert eine transitive Menge y derart, dass $x \subseteq y$ und $y \subseteq z$ für alle transitiven z mit $x \subseteq z$. Dieses y heißt auch transitive Hülle von x, geschrieben $TC(x)$. (5 Punkte)
b) Zeigen Sie: x ist endlich erblich genau dann, wenn $TC(x)$ endlich ist. (5 Punkte)

Aufgabe 7:
Welche ZFC-Axiome gelten in allen V_λ, wobei $\lambda > \omega$ Limesordinalzahl?

Aufgabe 8:
Das Hausdorff-Prinzip (HP) ist folgende Aussage:
Ist $(X, \leq)$ eine partielle Ordnung, $P \subseteq X$ durch $\leq$ linear geordnet, so existiert $P \subseteq Z \subseteq X$ derart, dass Z durch $\leq$ linear geordnet und $Y \subseteq Z$ für alle durch $\leq$ linear geordneten Y mit $P \subseteq Y \subseteq X$. Zeigen Sie (in ZF): HP ist äquivalent zu ZL.

Soweit im Aufgabentext nicht anders gemerkt, sind bei jeder Aufgabe bis zu 10 Punkten zu erreichen.
Abgabe am 27.06.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.