Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2012
24.10.2012
Zettel 1

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 2

Aufgabe 1:
(1) Zeigen Sie: Ist x eine Menge, so existiert eine eindeutig bestimmte Menge y derart, dass $x \subseteq y$, $trans(y)$ und $y \subseteq z$ für jedes transitive z mit $x \subseteq z$. Dieses y bezeichnet man auch als transitive Hülle $tc(x)$ von x. (5 Punkte)
(2) Es sei nun $\alpha \in On$. Bestimmen Sie $tc(\{\alpha\})$ (5 Punkte).

Aufgabe 2: Eine $LAST$-Formel ϕ 'gilt in V_ω', falls die Formel ϕ^{V_ω}, die aus ϕ dadurch entsteht, dass man jeden Quantor $\forall x$ bzw. $\exists x$ in ϕ durch den beschränkten Quantor $\forall x \in V_\omega$ bzw. $\exists x \in V_\omega$ ersetzt, wahr ist.
(1) Zeigen Sie: In V_ω gelten alle ZFC-Axiome außer dem Unendlichkeitsaxiom.
(2) Welche ZFC-Axiome gelten in jedem V_α, wobei α eine unendliche Ordinalzahl ist?
(3) Für welche α gilt das Potenzmengenaxiom in V_α?

Zusatzaufgabe für Interessierte: Eine unendliche Kardinalzahl κ heißt stark unerreichbar, falls κ regulär ist und für alle Kardinalzahlen λ gilt, dass mit $\lambda < \kappa$ auch $2^\lambda < \kappa$ ist. Beweisen Sie: Ist κ stark unerreichbare Kardinalzahl, so gelten alle ZFC-Axiome in V_κ.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 31.10.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.