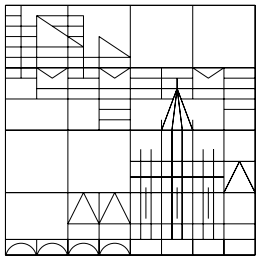

Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

WS 2012/2013
23.01.2013
Zettel 12

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 2

In allen folgenden Aufgaben sei M ein Grundmodell, $(\mathbb{P}, \leq)$ ein Forcing in M, G ein M-generischer Filter auf $(\mathbb{P}, \leq)$ und $M[G]$ die entsprechende generische Erweiterung.

Aufgabe 1: Es sei $\mathbb{P} := \{f : \omega \to \aleph_1^M | card(f) < \omega\}$, d.h. $\mathbb{P}$ bestehe aus den endlichen Funktionen mit Definitionsbereich in ω und Wertebereich in $\aleph_1^M$. Ferner sei $p_1 \leq p_2$ gdw. $p_1 \subseteq p_2$ für $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$.
Zeigen Sie: In $M[G]$ existiert eine Surjektion $g : \omega \to \aleph_1^M$. Folgern Sie: $M[G] \models card(\aleph_1^M) = \omega$.

Aufgabe 2: Es seien $\dot{x}, \dot{y} \in M$ mit $dom(\dot{x}), dom(\dot{y}) \subseteq \{\check{i} | i \in \omega\}$; ferner sei

$$\dot{z} = \{(\check{i}, p) | \exists q, r (p \leq q \wedge p \leq r \wedge (\check{i}, q) \in \dot{x} \wedge (\check{i}, r) \in \dot{y})\}$$

Es sei nun G ein (nicht notwendig generischer) Filter auf $(\mathbb{P}, \leq)$. Zeigen Sie: $\dot{z}^G = \dot{x}^G \cap \dot{y}^G$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $(\mathbb{P}, \leq)$ ein unendliches Forcing in M (d.h. $card(\mathbb{P}) \geq \omega$). Zeigen Sie: Es existiert $H \subseteq \mathbb{P}$ so, dass $M[H] \not\models ZF - P$.
Hinweis: Es sei $M \ni f : \omega \times \omega \to \mathbb{P}$ eine Injektion. Wählen Sie H so, dass $f^{-1}[H]$ eine Wohlordnung mit Ordnungstyp $\geq On \cap M$ codiert und arbeiten Sie auf einen Widerspruch hin.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 30.01.2013 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.