Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

WS 2012/2013
06.01.2013
Zettel 14

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 2

A point of view which the author feels may eventually come to be accepted is that the continuum hypothesis is obviously false.
Paul Cohen

Aufgabe 1: Es sei M ein Grundmodell,
$\mathbb{P} = (P, \leq) := (\{f : \omega \to \{0,1\} || f| < \omega\}, \leq)$, ferner G ein M-generischer Filter auf $\mathbb{P}$. Zeigen Sie:
a) $\bigcup G \in \mathfrak{P}(\omega)$
b) $\forall x \in \mathfrak{P}^M(\omega)(\bigcup G \neq x)$
Ein Forcing mit $(P, \leq)$ fügt also dem Grundmodell mindestens eine reelle Zahl hinzu. Eine solche Zahl $\bigcup G$ heißt auch 'Cohen-Real'.

Aufgabe 2: Es seien M und $(P, \leq)$ wie in Aufgabe 1. Ist $N \models ZFC$, schreiben wir $\mathbb{R}^N$ für $\mathfrak{P}^N(\omega)$. In Aufgabe 1 haben wir also gezeigt, dass $\mathbb{R}^M(\omega) \subsetneq \mathbb{R}^{M[G]}(\omega)$, falls G M-generisch über $\mathbb{P}$ ist. Unser Ziel ist es jetzt, zu zeigen, dass $\mathbb{R}^M$ in $M[G]$ sogar vom Maß 0 ist. Sei dazu G wie oben, ferner $c := \bigcup G$.
Betrachte dazu für $s \in^{<\omega} \{0,1\}$ (also eine endliche Folge von 0 und 1) das Intervall $I_s := \{x \in \mathbb{R} | s \subseteq x\}$. Ist s eine Folge der Länge n, so hat I_s also die Länge 2^{-n}. Ferner sei $i \in \omega$ beliebig. Zu $n < \omega$ definiere $s_n : i+n+1 \to \{0,1\}$ durch $s_n(l) = c(n+l)$ und setze $I_n := I_{s_n}$.
a) Zeigen Sie: Bezeichnet $|I|$ die Länge des Intervalls I, so ist $\Sigma_{n<\omega} |I_n| = 2^{-i}$.
b) Es sei nun $x \in \mathbb{R}^M$ beliebig. Zeigen Sie: Es existiert ein $j \in \omega$ so, dass $x \in I_j$. Betrachten Sie dazu eine geeignete dichte Menge D_x und benutzen Sie die Generizität von G. Folgern Sie, dass $\mathbb{R}^M \subseteq \bigcup_{n<\omega} I_n$.
c) Folgern Sie, dass $\mathbb{R}^M$ in $M[G]$ eine Nullmenge ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Der amerikanische Mengentheoretiker Chris Freiling hat 1986 ein Gedankenexperiment (G) vorgeschlagen, das zeigen soll, dass die Kontinuumshypothese falsch ist:

(G) *Nehmen wir an, CH sei richtig. Dann existiert eine Wohlordnung $\leq^*$ vom Ordnungstyp ω_1 auf dem reellen Einheitsintervall $[0,1]$. Wir stellen uns nun vor, dass wir nacheinander mit verbundenen Augen zwei Dartpfeile auf das Einheitsintervall werfen und dabei - in dieser Reihenfolge - zwei reelle Zahlen, r_1 und r_2, treffen. Vernachlässigen wir den Fall, dass $r_1 = r_2$, so gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder ist $r_1 <^* r_2$ oder $r_2 <^* r_1$. Da wir blind werfen und r_1 und r_2 also genauso gut in umgekehrter Reihenfolge hätten getroffen werden können, sollten wir erwarten, dass beide Ereignisse gleich wahrscheinlich sind. Tatsächlich können wir aber fast sicher vorhersagen, dass der zweite Fall nicht eintreffen wird: Ist r_1 gewählt, so gibt es nach der Wahl von $\leq^*$ nur abzählbar viele r mit $r <^* r_1$, diese bilden also eine Menge vom Maß 0. Dieser Widerspruch zeigt, dass CH falsch sein muß.*

a) Diskutieren Sie, inwiefern dieses Argument stichhaltig ist und welche impliziten Annahmen es ggf. macht.

Die Intuition, die hinter diesem informellen Argument steht, hat Freiling auch präzise formuliert. So gelangte er zu seinem Symmetrieaxiom (AS):

$$\text{(AS) } \forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\aleph_0} \exists x_1, x_2 [x_2 \notin f(x_1) \wedge x_1 \notin f(x_2)]$$

(Hier bezeichnet $\mathbb{R}_{\aleph_0}$ die Menge der abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$).

b) Erklären Sie den Zusammenhang zwischen AS und (G).

c) Zeigen Sie (in ZFC): $AS \leftrightarrow \neg CH$

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 13.02.2013 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.