Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

SS 2012
07.11.2012
Zettel 3

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 2

Aufgabe 1: Es sei M eine beliebige Klasse. M heißt extensional, falls $X \cap M = Y \cap M \implies X = Y$.
a) Zeigen Sie: M ist genau dann extensional, wenn $[Ext]^M$ gilt, wenn also in M das Extensionalitätsaxiom gilt.
b) Bestimmen Sie eine Klasse M und ein $x \in M$ derart, dass $[x \in On]^M$, aber $x \notin On$.

Aufgabe 2: Eine Menge x heißt erblich abzählbar, falls x abzählbar ist und alle Elemente von x erblich abzählbar sind. Mit H_{ω_1} bezeichnen wir die Klasse der erblich abzählbaren Mengen.
a) Zeigen Sie, dass H_{ω_1} eine Menge ist.
b) Zeigen Sie: In H_{ω_1} gilt nicht das Potenzmengenaxiom, aber es gelten alle anderen ZFC-Axiome.

Aufgabe 3:
Wir haben den Reflektionssatz in der Vorlesung für endliche Mengen von $LAST$-Formeln formuliert. Versuchen Sie, den Beweis auf abzählbare Formelmengen zu übertragen. Zeigen Sie auf, wo die Übertragung scheitert.

Zusatzaufgabe für Interessierte:
Zeigen Sie: Ist κ stark unerreichbare Kardinalzahl, so existiert $\alpha < \kappa$ derart, dass für alle $LAST$-Formeln ϕ gilt:

$$[\phi]^{V_\alpha} \leftrightarrow [\phi]^{V_\kappa}$$

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 14.11.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.