Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

WS 2012/2013
14.11.2012
Zettel 4

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 2

Aufgabe 1:
Es sei Θ eine unendliche Limesordinalzahl. Zeigen Sie: Die $\in$-Formel $card(x) = y$ ist V_Θ-absolut.

Aufgabe 2:
Eine Folge $(W_\iota | \iota \in On)$ heiße präkumulativ, falls $W_{\iota_1} \subseteq W_{\iota_2}$ für alle $\iota_1 < \iota_2$. Finden Sie eine präkumulative Hierarchie, für die der Levysche Reflektionssatz nicht gilt, d.h. für die es eine $\in$-Formel ϕ und eine Ordinalzahl α gibt derart, dass $(\phi)^W$ gilt (mit $W := \bigcup_{\iota \in On} W_\iota$), aber kein $\beta > \alpha$ existiert mit $(\phi)^{W_\beta}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Ist X eine Klasse, $\phi(x, \vec{y})$ eine $LAST$-Formel, so sei zu $\vec{b} \subseteq X$ der Komprehensionsoperator Def gegeben durch:

$$Def(X, \phi, \vec{b}) := \{x \in X | X \models \phi(x, \vec{b})\}$$

Nun definieren wir die L-Hierarchie, indem wir Def entlang der Ordinalzahlen iterieren: $L_0 := \emptyset$, $L_{\alpha+1} := \{Def(L_\alpha, \phi, \vec{b}) | \phi \in LAST \wedge \vec{b} \subseteq L_\alpha\}$ und $L_\lambda = \bigcup_{\iota < \lambda} L_\iota$, falls λ Limesordinalzahl ist. Ferner setzen wir $L := \bigcup_{\iota \in On} L_\iota$.
Zeigen Sie:
(1) L ist transitiv.
(2) L ist Modell für [Ex], [Ext], [Inf], [Ver], [Aus] und [Ers].

Bemerkung: L heißt auch konstruktibles Universum. Es gilt $L \models ZFC$ und $L \subseteq M$ für jedes transitive $M \models ZFC$ mit $On \subseteq M$. L ist also das $\subseteq$-minimale transitive Modell der Mengenlehre, das alle Ordinalzahlen enthält. Außerdem gilt in L die verallgemeinerte Kontinuumshypothese GCH.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 21.11.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.