Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl

WS 2012/2013
21.11.2012
Zettel 5

Übungen zur Axiomatischen Mengenlehre 2

Aufgabe 1:
Es seien OD und HOD die Klassen der ordinalzahldefinierbaren und der erblich ordinalzahldefinierbaren Mengen wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie:

$$OD = HOD \leftrightarrow V = HOD$$

D.h.: die erblich ordinalzahldefinierbaren Mengen fallen mit den ordinalzahldefinierbaren Mengen genau dann zusammen, wenn jede Menge erblich ordinalzahldefinierbar ist.

Aufgabe 2:
Es sei Fml die Menge der gödelisierten $LAST$-Formeln wie in der Vorlesung definiert. Geben Sie eine parameterfreie Wohlordnung $<_{Fml}$ von Fml im Ordnungstyp ω an, d.h. finden Sie eine $LAST$-Formel $\phi(x, y)$ so, dass $\{(x, y)|\phi(x, y)\}$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp ω auf Fml ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Wir betrachten die Erweiterung $LAST_A$ von $LAST$ um ein einstelliges Prädikatssymbol A, das wir als Klasse interpretieren. Fml_A bezeichne die Menge der formalen $LAST_A$-Formeln. Ferner definieren wir:

$$\begin{gathered} OD(A) := \{y|\exists\alpha \in On \exists\phi \in Fml_A \exists f : \omega \to A \cap V_\alpha \\ y = \{z \in V_\alpha|(V_\alpha, A \cap V_\alpha, \in) \models \phi[f\tfrac{z}{0}]\}\} \end{gathered}$$

und entsprechend $HOD(A) := \{y|tc(\{y\}) \subseteq OD(A)\}$. Zeigen Sie:
a) Ist A transitiv, so ist $A \subseteq HOD(A)$.
b) Ist A transitiv und durch endlich viele Parameter $a_0, ..., a_{n-1} \in A$ definierbar, so gilt $ZF^{HOD(A)}$.

Bemerkung: $AC^{HOD(A)}$ gilt im Allgemeinen nicht!

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 28.11.2012 in der Vorlesungspause oder per Mail als PDF an merlin.carl@uni-konstanz.de.