Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Merlin Carl
Sommersemester 2018

Übungsblatt 1 zur Vorlesung 'Reell abgeschlossene Körper und schwache Arithmetik'

Aufgabe 1: Es sei $V(x,y)$ die Relation 'x ist Vater von y', $M(x,y)$ die Relation 'x ist die Mutter von y' und $E(x,y)$ die Relation 'x ist mit y verheiratet'. Außerdem sei H ein unäres Relationszeichen für 'männlich' und D eines für weiblich. Drücke damit folgende Behauptungen aus:

(a) Die Ehe ist symmetrisch.
(b) x und y sind Geschwister.
(c) x ist die Nichte von y.

Im Folgenden sollen M und V auch angeheiratete Verwandschaften umfassen; die Stiefmutter einer Person etwa soll also ebenfalls als deren Mutter zählen und ebenso gilt jemand als Vater seiner Schwiegertochter (insbesondere kann eine Person also viele Mütter und Väter haben). Außerdem fügen wir der Sprache die Konstantenzeichen a, b, c, d hinzu.

(d) Es gelte $D(a)$, $D(b)$, $H(c)$, $H(d)$ und ferner $M(a,b)$, $V(c,d)$, $E(c,b)$ und $E(d,a)$. Stelle möglichst wenige und möglichst einfache Axiome auf, die den Gegenstandsbereich korrekt beschreiben und zeige auf der Grundlage dieser Axiome, dass d sein eigener Großvater ist.

Aufgabe 2: Es sei ϕ eine Formel in der Sprache $\mathscr{L}_{\text{or}}$ der geordneten Ringe.

(a) Zeige: Ist ϕ quantorenfrei und $\vec{q} \subseteq \mathbb{Q}$, so gilt $\mathbb{Q} \models \phi(\vec{q})$ gdw. $\mathbb{R} \models \phi(\vec{q})$.

(b) Finde ein Beispiel für eine $\mathscr{L}_{\text{or}}$-Formel ϕ und ein $\vec{q} \in \mathbb{Q}$ so, dass $\mathbb{Q} \models \phi(\vec{q})$, aber $\mathbb{R} \not\models \phi(\vec{q})$.

Zusatzaufgabe für Interessierte:

(a) Es sei $\mathscr{L} = \{+\}$. Wir betrachten die Strukturen $\mathscr{M} = (\mathbb{N}, +^{\mathscr{M}})$, wobei $+^{\mathscr{M}}$ die gewöhnliche Addition natürlicher Zahlen bezeichnet und ferner $\mathscr{N} = (\mathbb{N}\times\mathbb{N}, +^{\mathscr{N}})$, wobei $+^{\mathscr{N}}$ die komponentenweise Addition auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bezeichnet. Beweise oder widerlege: Es ist $\mathscr{M} \equiv \mathscr{N}$.

(b) Was ist mit $(\mathbb{Z}, +, 0)$ und $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, 0)$?[1]

(c) Zeige allgemein: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{Z}^n, +, 0) \equiv (\mathbb{Z}^m, +, 0)$ gdw. $m = n$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis zum auf die Ausgabe folgenden Donnerstag in der Vorlesung.

[1]Tipp: Ein möglicher Ausgangspunkt ist der Satz 'Jede Zahl ist gerade oder ungerade'.