Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Merlin Carl
Sommersemester 2018

Übungsblatt 2 zur Vorlesung 'Reell abgeschlossene Körper und schwache Arithmetik'

Aufgabe 1: In einem Graphen $G = (V, R)$ sagt man, die Ecke v' sei von der Ecke v aus 'erreichbar', falls eine endliche Folge $v = v_0, ..., v_n = v'$ von Ecken von G so existiert, dass $(v_i, v_{i+1}) \in R$ für $i \in \{0, ..., n-1\}$, falls man also entlang der Kanten von G von v nach v' laufen kann.

Der Graph (V, R) heißt 'zusammenhängend', falls für je zwei verschiedene $v, v' \in V$ gilt, dass v' von v aus erreichbar ist.

Zeige, dass die Klasse der zusammenhängenden Graphen nicht elementar ist.

Aufgabe 2:

(a) Zeige: Sind p und q Primzahlen, so existiert ein Automorphismus von $(\mathbb{Z}, \cdot)$, der p und q vertauscht.[1]

(b) Zeige: Die Menge der ungeraden Zahlen ist keine $\emptyset$-definierbare Teilmenge von $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

(c) Zeige: Die Menge der (positiven und negativen) Primzahlen ist eine $\emptyset$-definierbare Teilmenge von $(\mathbb{Z}, \cdot)$. (Tipp: Zeige zunächst, dass $\{-1, 1\}$ definierbar ist.)

Zusatzaufgabe für Interessierte:

(a) Zeige: $\{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$ ist keine definierbare Teilmenge von $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

(b) Zeige: Ist $z \in \mathbb{Z}$, so ist $\{z\}$ eine $\emptyset$-definierbare Teilmenge von $(\mathbb{Z}, \cdot)$ genau dann, wenn $z \in \{-1, 0, 1\}$.

(c) Zeige: Ist $X \subseteq \mathbb{Z}$ endlich, so ist X eine $\emptyset$-definierbare Teilmenge von $(\mathbb{Z}, \cdot)$ genau dann, wenn $X \subseteq \{-1, 0, 1\}$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis zum auf die Ausgabe folgenden Donnerstag in der Vorlesung.

---

[1] Tipp: Primfaktorzerlegung!